

Astérisque

CÉDRIC BONNAFÉ

**Sur les caractères des groupes réductifs finis à
centre non connexe : applications aux groupes
spéciaux linéaires et unitaires**

Astérisque, tome 306 (2006)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_2006__306__R1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_2006__306__R1_0)

© Société mathématique de France, 2006, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LES CARACTÈRES DES
GROUPES RÉDUCTIFS FINIS
À CENTRE NON CONNEXE :
APPLICATIONS AUX GROUPES
SPÉCIAUX LINÉAIRES ET UNITAIRES**

Cédric Bonnafé

C. Bonnafé

CNRS, UMR 6623, Département de Mathématiques, Université de Franche-Comté,
16 Route de Gray, 25030 BESANÇON Cedex, FRANCE.

E-mail : bonnafe@math.univ-fcomte.fr

Url : http://www-math.univ-fcomte.fr/pp_Annu/CBONNAFE/

Classification mathématique par sujets (2000). — 20G05 ; 20G40.

Mots clefs. — Groupes réductifs finis, théorie de Deligne-Lusztig, caractères de Gelfand-Graev, éléments unipotents réguliers, faisceaux caractères, conjecture de Lusztig, groupe spécial linéaire, groupe spécial unitaire.

SUR LES CARACTÈRES DES GROUPES RÉDUCTIFS FINIS À CENTRE NON CONNEXE : APPLICATIONS AUX GROUPES SPÉCIAUX LINÉAIRES ET UNITAIRES

Cédric Bonnafé

Résumé. — Un premier but de cet article est de présenter une synthèse des résultats de plusieurs auteurs concernant les caractères des groupes réductifs finis à centre non connexe. Nous nous intéressons particulièrement aux problèmes directement liés à la non connexité du centre. Nous insistons notamment sur les caractères de Gelfand-Graev et les caractères semisimples.

Un deuxième but est d'étudier l'influence de la non connexité du centre sur la théorie des faisceaux-caractères. Nous nous concentrons sur la famille des faisceaux-caractères dont le support rencontre la classe unipotente régulière : ce sont les analogues naturels des caractères semisimples.

Le dernier but est l'application de ces résultats aux groupes réductifs finis de type A , déployés ou non (comme par exemple les groupes spéciaux linéaires ou unitaires). Lorsque le cardinal du corps fini de référence est assez grand, nous obtenons un paramétrage des caractères irréductibles, calculons explicitement le foncteur d'induction de Lusztig dans la base des caractères irréductibles, paramétrons les faisceaux-caractères et montrons que les fonctions caractéristiques de ces faisceaux-caractères sont des transformées de Fourier des caractères irréductibles (conjecture de Lusztig). Ces résultats permettent de construire un algorithme théorique pour calculer la table de caractères de ces groupes.

Abstract (On the characters of finite reductive groups with disconnected center: applications to special linear and special unitary groups)

A first aim of this paper is to present an overview of results obtained by several authors on the characters of finite reductive groups with non-connected centre. We are particularly interested in problems directly linked to the non-connectedness of the centre. We emphasise on Gelfand-Graev and semisimple characters.

A second aim is to study the influence of the non-connectedness of the centre on the theory of character sheaves. We study more precisely the family of character sheaves whose support meets the regular unipotent class: these are analogues of the semisimple characters.

The last aim is the application of these results to finite reductive groups of type A , split or not (as for instance the special linear or special unitary groups). Whenever the cardinality of the finite field is large enough, we obtain a parametrization of the irreducible characters, a parametrization of the character sheaves, and we show that the characteristic functions of character sheaves are Fourier transforms of the irreducible characters (Lusztig's conjecture). This gives a theoretical algorithm for computing the character table of these groups.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Préliminaires, notations, définitions	9
1. Notations générales	9
2. Le contexte	17
3. Fourre-tout	22
2. Le groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$	25
Notations	25
4. Calcul de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$	26
5. Groupes simplement connexes	28
6. Le groupe $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$	30
7. Cuspidalité	33
8. Éléments semi-simples et non connexité du centre	34
3. Induction et restriction de Lusztig, séries de Lusztig	41
9. Caractères linéaires de tores maximaux	41
10. Induction et restriction de Lusztig	46
11. Séries de Lusztig géométriques et rationnelles	51
4. Théorie de Harish-Chandra	59
12. Autour d'un théorème de M. Geck	59
13. Algèbres d'endomorphismes	64
5. Autour des caractères de Gelfand-Graev	73
14. Caractères de Gelfand-Graev	73
15. Caractères réguliers et caractères semi-simples	78
16. Caractères semi-simples ou réguliers cuspidaux	82
17. Caractères semi-simples et fonctions absolument cuspidales	86

6. Faisceaux-caractères	95
18. Action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur les faisceaux-caractères	95
19. Action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur $\text{FCar}(\mathbf{G})$	99
20. Fonctions caractéristiques	104
21. Éléments unipotents réguliers	106
22. Lien avec les caractères semi-simples	110
7. Groupes de type A	113
23. Description de $\text{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$	113
24. Conjecture de Lusztig	120
25. Table de caractères de $\mathbf{G}^F$	124
8. Le groupe spécial linéaire	127
26. Théorie de Harish-Chandra	127
27. Décomposition de Jordan	129
28. Normalisation des fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères	129
29. Algorithme	134
30. Le cas où n est premier et impair	138
31. Le cas où $n = 4$	140
32. Questions en suspens	141
A. Produits en couronne	143
33. Extension canonique	143
34. Produits en couronne de groupes symétriques	145
35. Extension canonique, extension préférée	148
B. Sommes de Gauss	151
36. Sommes de Gauss	151
37. Calcul de $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta)$	153
Bibliographie	157
Index	161

INTRODUCTION

En 1907, Schur [Sch07] et Jordan [Jor07] déterminaient les tables de caractères du groupe général linéaire $GL(2, q)$ et du groupe spécial linéaire $SL(2, q)$. La table de $PSL(3, q)$ fut obtenue en 1921 par Brinkman [Bri21]. En 1951, Steinberg [Ste51b] calculait la table de caractères de $GL(3, q)$ et $GL(4, q)$, en utilisant entre autres des constructions générales de représentations (que nous appelons de nos jours *unipotentes*) de $GL(n, q)$ (voir [Ste51a]). Finalement, au prix d'un tour de force combinatoire remarquable, Green [Gre55] déterminait en 1955 la table de caractères de $GL(n, q)$ (au moins algorithmiquement). Par contre, les progrès concernant le groupe spécial linéaire furent beaucoup plus longs. En 1971, Lehrer [Leh71] obtenait dans sa thèse une partie de la table de caractères de $SL(4, q)$, celle correspondant aux séries discrètes. Le cas de $SL(3, q)$ fut réglé en 1973 (voir [SF73] ou [Leh73]). Notons que les travaux de Lehrer [Leh73] concernaient le groupe $SL(n, q)$, pour n quelconque : en particulier, même si cela n'est pas explicitement écrit dans [Leh73], cet article contenait toutes les informations nécessaires pour compléter la table de caractères de $SL(n, q)$ lorsque n est premier. Un des buts de notre article est de fournir un algorithme théorique pour calculer la table de caractères de $SL(n, q)$: cependant, nous ne sommes capables de montrer la validité de cet algorithme que lorsque q est assez grand.

Plus généralement, si $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe défini sur une clôture algébrique $\mathbb{F}$ du corps fini à p éléments $\mathbb{F}_p$ (p premier) et si $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ est une isogénie dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius relatif à une $\mathbb{F}_q$ -structure sur $\mathbf{G}$ ($q = p^f$), le calcul de la table de caractères du groupe fini $\mathbf{G}^F$ (appelé *groupe réductif fini*) est loin d'être résolu en toute généralité. Rappelons quand même que le cas du groupe $Sp(4, q)$ a été résolu, pour q impair, par Srinivasan [Sri68] en 1968. D'autres résultats ont été obtenus sur les petits groupes (groupes de Suzuki, groupes de Ree...).

Pourtant, en 1976, l'article fondateur de Deligne et Lusztig [DL76] permettait à la théorie des caractères des groupes réductifs finis de faire des progrès considérables. Leur idée, inspirée par des calculs de Drinfeld montrant que la série discrète de $SL(2, q)$ apparaissait dans la cohomologie ℓ -adique de la variété définie par l'équation $xy^q - yx^q = 1$, était d'utiliser la structure géométrique de $\mathbf{G}$ pour produire des variétés sur lesquelles le groupe fini $\mathbf{G}^F$ agit et de récupérer ainsi des représentations de $\mathbf{G}^F$ dans la cohomologie ℓ -adique de ces variétés. Poursuivant dans cette voie, Lusztig [Lus84a], après une série impressionnante d'articles, obtenait en 1984 le paramétrage des caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$ (dans l'esprit du programme de Langlands) lorsque le centre de $\mathbf{G}$ est connexe. En plus de ce paramétrage, il obtenait une formule explicite pour le degré de ces caractères ainsi qu'un algorithme (théorique) permettant de calculer les valeurs de ces caractères en les éléments semi-simples.

Au cours de sa démarche, Lusztig introduisait une nouvelle base orthonormale de l'espace des fonctions centrales, la base des *caractères fantômes*, obtenue à partir de la base des caractères irréductibles par une matrice diagonale par blocs, les blocs étant des matrices de transformées de Fourier associées à des petits groupes finis (dont la taille ne dépend pas de q). En 1984-1986, Lusztig (voir [Lus84b] et [Lus85]) développait une nouvelle théorie, la théorie des *faisceaux-caractères*, dans le but de comprendre l'intrusion de ces petits groupes finis et de ces caractères fantômes. Un faisceau-caractère est un faisceau pervers $\mathbf{G}$ -équivariant irréductible sur $\mathbf{G}$ satisfaisant certaines conditions. Si A est un faisceau-caractère F -stable, on peut lui associer une fonction centrale sur $\mathbf{G}^F$, appelée *fonction caractéristique de A* ; cette fonction n'est définie qu'à une constante multiplicative près mais Lusztig a défini des normalisations qui en font des fonctions de norme 1. De plus, Lusztig a montré que ces fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F -stables forment une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales. Il a fait la conjecture suivante :

Conjecture de Lusztig. — *Si le centre de $\mathbf{G}$ est connexe, la matrice de passage entre la base des caractères fantômes et la base des fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F -stables sur $\mathbf{G}$ est diagonale.*

En 1995, Shoji [Sho95] démontrait cette conjecture. D'autre part, Lusztig a aussi décrit un algorithme théorique permettant de calculer les fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F -stables, même lorsque le centre de $\mathbf{G}$ n'est pas connexe. Il repose cependant sur la normalisation précise des fonctions notées Y_i dans [Lus85, Partie V, section 24.2]. Ces normalisations ont été obtenues récemment dans les groupes de type A par T. Shoji [Sho05].

Il apparaît ainsi au cours de l'évolution de la théorie que la non-connexité du centre de $\mathbf{G}$ entraîne de nombreuses complications. Certaines sont techniques (comme par exemple le paramétrage des classes de conjugaison), d'autres sont théoriques (comme par exemple la non-connexité du centralisateur des éléments semi-simples du dual

de $\mathbf{G}$ ou l'augmentation significative du nombre de faisceaux-caractères cuspidaux). Cette non-connexité du centre explique les difficultés qui ont émaillé la recherche d'une table de caractères pour le groupe spécial linéaire.

Plusieurs auteurs ont étudié les groupes réductifs finis à centre non connexe (Asai [Asa87], Lusztig [Lus88], Digne et Michel [DM90], Digne, Lehrer et Michel [DLM92], [DLM97], Shoji [Sho98] ou l'auteur [Bon96], [Bon00a], [Bon00b]). Le paramétrage des caractères irréductibles a été achevé par Lusztig [Lus88] et des nouvelles informations sur la table de caractères du groupe $\mathbf{G}^F$ (par exemple la valeur en les éléments unipotents réguliers [DLM92]) ont été obtenues.

Concernant l'analogie de la conjecture de Lusztig, un des premiers problèmes vient de ce qu'il n'y a pas de définition indiscutable de la notion de caractère fantôme. On peut alors considérer comme une réponse positive à la conjecture de Lusztig pour les groupes à centre non connexe un théorème qui montrerait que la base des fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F -stables est obtenue à partir de la base des caractères irréductibles par une matrice diagonale par blocs, les blocs étant des matrices de transformées de Fourier associées à des petits groupes finis. Dans cette acceptation, la conjecture de Lusztig a été démontrée pour les groupes spéciaux orthogonaux et symplectiques par Waldspurger [Wal04] lorsque q est assez grand.

Shoji [Sho06] a démontré la conjecture de Lusztig pour le groupe $SL(n, q)$ pour $p > 3n$ et q une puissance quelconque de p . Il a aussi proposé une définition intéressante de caractère fantôme : un caractère fantôme devrait être la descente de Shintani de $\mathbf{G}^{F^n}$ à $\mathbf{G}^F$ d'un caractère irréductible F -stable de $\mathbf{G}^{F^n}$ (pour n suffisamment divisible). Cette définition a le mérite d'être correcte lorsque le centre de $\mathbf{G}$ est connexe et de rendre vraie la conjecture de Lusztig pour le groupe spécial linéaire.

Un des buts du présent article est de démontrer la conjecture de Lusztig (sans prendre la définition de Shoji de caractère fantôme) pour le groupe spécial linéaire et le groupe spécial unitaire lorsque p est quelconque et q est assez grand. Plus précisément, nous obtenons un paramétrage des caractères de ces groupes réductifs finis et définissons a priori, sans référence à la théorie des faisceaux-caractères, des transformées de Fourier naturelles de ces caractères irréductibles (nous nous inspirons de [DM90, §5 et 6]). Nous montrons alors que la matrice de passage entre la base des transformées de Fourier et la base des fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F -stables est diagonale et calculons explicitement les coefficients diagonaux. Dans l'optique d'obtenir un algorithme pour calculer la table de caractères de ces groupes, notre résultat est satisfaisant. Il faut cependant être réaliste : la mise en œuvre de cet algorithme nécessite encore un travail considérable. Le plus difficile en pratique (et le plus facile en théorie) est de ramener cette question au problème du calcul des valeurs des caractères en les éléments unipotents. Pour le groupe spécial linéaire, nous donnons un algorithme précis pour le calcul de ces dernières.