

**323**

**ASTÉRISQUE**

**2009**

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES  
ET SINGULARITÉS.  
EN L'HONNEUR DE J. M. AROCA

F. Cano, F. Loray, J. J. Morales-Ruiz,  
P. Sad, M. Spivakovsky, éditeurs

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

## DYNAMIQUE TRANSVERSE DE LA LAMINATION DE GHYS-KENYON

*par*

Fernando Alcalde Cuesta, Alvaro Lozano Rojo & Marta Macho Stadler

---

**Résumé.** — À partir d'un arbre apériodique et répétitif du graphe de Cayley du groupe abélien libre à deux générateurs décrit par Kenyon, Ghys a construit un exemple de lamination minimale par surfaces de Riemann avec des feuilles euclidiennes et hyperboliques. On démontre que la dynamique transverse de cette lamination est représentée (du point de vue de la mesure) par une machine à sommer binaire. En fait, on peut décrire sa dynamique topologique transverse et montrer ainsi que la lamination de Ghys-Kenyon est affable.

**Abstract (Transverse dynamics of the Ghys-Kenyon lamination).** — Using an aperiodic and repetitive subtree of the Cayley graph of the free Abelian group with two generators, described by Kenyon, Ghys has constructed an example of minimal Riemann surface lamination having both Euclidean and hyperbolic leaves. We prove that the transverse dynamics of this lamination is represented (in a measurable way) by a 2-adic odometer. In fact, we can describe its topological transverse dynamics, and show that the Ghys-Kenyon lamination is affable.

### 1. Introduction

Il y a des laminations minimales par surfaces de Riemann où les types conformes des feuilles se mélangent. Le premier exemple a été construit par É. Ghys [4] à partir d'un arbre apériodique et répétitif décrit par R. Kenyon [7]. La construction comporte deux étapes distinctes, valables pour tout sous-graphe répétitif du graphe de Cayley  $\mathcal{G}$  d'un groupe infini de type fini  $G$ . Il s'agit d'abord de construire un espace compact, muni d'un feuilletage par graphes, puis d'obtenir une lamination par surfaces de Riemann. Soit  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$  l'ensemble des sous-graphes infinis de  $\mathcal{G}$  contenant l'élément neutre  $e$  de  $G$ . On munit  $\mathcal{T}$  de la *topologie de Gromov-Hausdorff* pour laquelle deux sous-graphes de  $\mathcal{G}$  sont proches s'ils coïncident sur une grande boule centrée

---

**Classification mathématique par sujets (2010).** — 37A20; 37C85.

**Mots clefs.** — Espace feuilleté, structure transverse, graphe.

Financé par Ministerio de Ciencia y Tecnología BFM2002-04439, Ministerio de Educación y Ciencia MTM2004-08214 et Universidad del País Vasco UPV 00127.310-E-14790/2002.

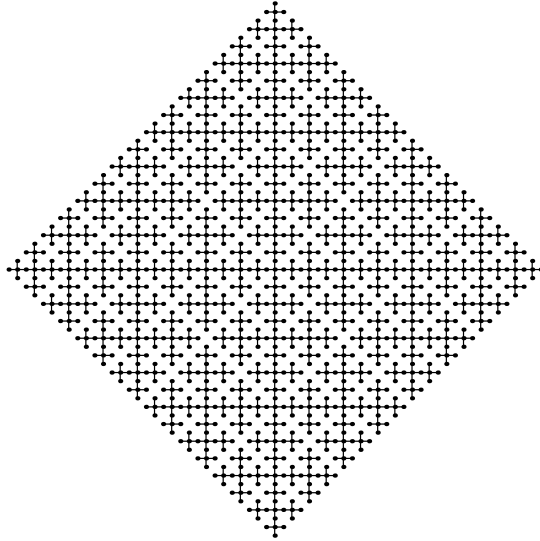


FIGURE 1. Arbre de Kenyon

en  $e$ . Puisqu'une boule ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, un procédé diagonal classique montre que  $\mathcal{T}$  est compact. Grâce à l'action de  $G$  sur  $\mathcal{G}$ , on définit une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  qui identifie un arbre  $T$  et son translaté  $T' = g^{-1}.T$  si  $g \in T$ . On peut d'ailleurs réaliser  $\mathcal{T}$  comme un sous-espace d'un espace métrique compact  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{G})$ , muni d'un feuilletage par graphes  $\mathcal{F}$  dont toutes les feuilles sont rencontrées par  $\mathcal{T}$ . Alors  $\mathcal{R}$  est induite par  $\mathcal{F}$  et les classes d'équivalence sont les ensembles de sommets des feuilles de  $\mathcal{F}$ .

Pour tout graphe  $T \in \mathcal{T}$ , l'ensemble  $X = \overline{\mathcal{R}[T]}$  est un fermé saturé pour  $\mathcal{R}$ , appelé l'*enveloppe de  $T$* . Il est réalisable comme transversale complète d'un espace feuilleté compact  $\mathbf{X}$ , à savoir la fermeture de la feuille  $L_T \in \mathcal{F}$  passant par  $T$ . Les ensembles  $X$  et  $\mathbf{X}$  sont minimaux si et seulement si le graphe  $T$  est *répétitif*, i.e. pour tout nombre réel  $r > 0$ , il existe un nombre réel  $R > 0$  tel que toute boule de rayon  $R > 0$  contient une boule qui est l'image par translation de la boule de centre  $e$  et rayon  $r > 0$ . Par ailleurs, l'holonomie de  $L_T$  est triviale si et seulement si  $T$  est *apériodique*, i.e.  $T \neq g.T$  pour tout élément  $g \neq e$  de  $G$ . Ces définitions s'inspirent de définitions analogues pour les pavages [9, 1].

Nous appellerons *espace feuilleté de Ghys-Kenyon* la fermeture  $\mathbf{X}$  de la feuille  $L_{T_\infty}$  passant par l'arbre de Kenyon  $T_\infty$  (voir la figure 1) dans l'espace  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ , munie du feuilletage induit par  $\mathcal{F}$ . Les feuilles sont des sous-arbres répétitifs et apériodiques du graphe de Cayley  $\mathcal{Z}^2$  de  $\mathbb{Z}^2$ . En remplaçant ces arbres par des surfaces, on obtient la lamination  $(\mathbf{M}, \mathcal{L})$  décrite par É. Ghys. Nous l'appellerons *lamination de Ghys-Kenyon*. Dans ce travail, nous allons récupérer l'espace  $\mathbf{X}$  par un procédé de construction de sous-arbres répétitifs et apériodiques de  $\mathcal{Z}^2$  à partir de suites de 4

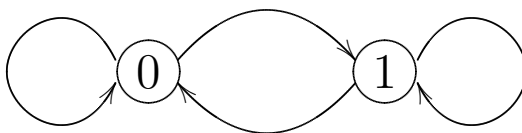


FIGURE 2. Machine à sommer binaire

éléments. Grâce à ce codage, nous montrerons que la dynamique transverse de ce feuilletage est représentée par l'automate de la fig. 2.

Cela signifie que  $\mathcal{R}$  est *stablement orbitalement équivalente* à la relation engendrée par la somme  $S(x) = x + 1$  définie sur l'anneau des entiers 2-adiques, ou de manière équivalente par la transformation  $T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  définie par :

- i) si  $\alpha_0 = 0$ , alors  $T(\alpha)_0 = 1$  et  $T(\alpha)_n = \alpha_n$  pour tout  $n \geq 1$ ,
- ii) si  $\alpha_0 = 1$ , alors  $T(\alpha)_0 = 0$  et  $T(\alpha)_1 = T(\sigma(\alpha))_0$  avec  $\sigma(\alpha)_n = \alpha_{n+1}$ .

Nous compléterons l'étude de l'exemple en décrivant sa dynamique topologique. Nous montrerons ainsi que  $\mathcal{L}$  est *affable*, en ce sens que  $\mathcal{R}$  est la limite inductive d'une suite de relations d'équivalence étales compactes [5]. La dynamique transverse de  $\mathcal{L}$  sera ainsi représentée par un système dynamique classique.

## 2. L'espace feuilleté de Gromov-Hausdorff

Soit  $S$  un système fini de générateurs de  $G$ . Le *graphe de Cayley*  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$  est un graphe localement fini non orienté, sans boucle, ni arête multiple, dont les sommets sont les éléments de  $G$ . Deux sommets  $g_1$  et  $g_2$  sont reliés par une arête si  $g_1^{-1}g_2 \in S$ . On appelle *longueur* de  $g$  le plus petit nombre d'éléments de  $S$  nécessaires pour écrire  $g$ , i.e.  $\text{long}_S(g) = \min\{n \geq 1 / g = s_1 \dots s_n \text{ avec } s_i s_{i+1} \neq e\}$ . La *distance des  $S$ -mots* est alors donnée par  $d_S(g_1, g_2) = \text{long}_S(g_1^{-1}g_2)$  pour tout couple  $g_1, g_2 \in G$ . Cette distance se prolonge en une distance sur  $\mathcal{G}$  telle que toute arête est isométrique à l'intervalle  $[0, 1]$ . Le graphe de Cayley  $\mathcal{G}$  devient ainsi un espace métrique connexe par chemins sur lequel le groupe  $G$  agit par isométries.

**2.1. Topologie de Gromov-Hausdorff.** — Soit  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$  l'ensemble des sous-graphes  $T$  de  $\mathcal{G}$  contenant l'élément neutre  $e$  de  $G$ . Notons  $B_T(e, N)$  (resp.  $\bar{B}_T(e, N)$ ) la boule ouverte (resp. fermée) de centre  $e$  et de rayon  $N$  et  $\text{val}_T(e)$  la valence de  $e$ , i.e. le nombre d'arêtes issues de  $e$ . Considérons l'ensemble  $A = \{ N \geq 1 / B_T(e, N) = B_{T'}(e, N) \}$  et la quantité

$$R(T, T') = \begin{cases} \sup A & \text{si } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } A = \emptyset, \end{cases}$$

qui appartient à  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  pour tout couple  $T, T' \in \mathcal{T}$ . On définit alors la *distance de Gromov-Hausdorff* par  $d(T, T') = e^{-R(T, T')}$ . C'est une ultramétrie et donc  $\mathcal{T}$  est totalement discontinu. Puisque la boule fermée  $\bar{B}_{\mathcal{G}}(e, N)$  ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, un procédé diagonal classique montre que  $\mathcal{T}$  est compact. Les

sous-graphes finis de  $\mathcal{G}$  correspondent aux points isolés de  $\mathcal{T}$ . Nous noterons désormais  $\mathcal{T}$  l'ensemble des sous-graphes *infinis* de  $\mathcal{G}$  contenant l'élément neutre  $e$ . L'avantage de la nouvelle définition est mise en évidence par le fait que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$  est alors homéomorphe à l'ensemble de Cantor, sauf si  $G = \mathbb{Z}$ .

**2.2. Structure feuilletée.** — L'espace  $\mathcal{T}$  est muni d'une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  qui identifie deux graphes  $T$  et  $T'$  si  $T' = g^{-1}.T$  avec  $g \in T$ . Toute classe d'équivalence  $\mathcal{R}[T]$  peut être alors réalisée comme l'ensemble de sommets d'un graphe  $\overline{\mathcal{R}}[T]$ . Il suffit de joindre  $T' = g^{-1}.T$  et  $T'' = h^{-1}.T$  par une arête si  $d_S(g, h) = 1$ . Le graphe  $\overline{\mathcal{R}}[T]$  est donc isomorphe au quotient de  $T$  par le groupe de translations  $\text{Iso}(T) = \{g \in \mathcal{G}/T = g.T\}$ . C'est une feuille de l'espace feuilleté compact fourni par le résultat suivant :

**Théorème de réalisation géométrique 2.2.1.** — *Il y a un espace compact, métrisable et séparable  $\mathcal{T}$ , muni d'un feuilletage par graphes  $\mathcal{G}$ , pour lequel  $\mathcal{T}$  est une transversale complète et  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence induite sur  $\mathcal{T}$ .*

*Démonstration.* — Considérons le sous-espace  $\widetilde{\mathcal{T}} = \{(T, g) \in \mathcal{T} \times \mathcal{G} \mid g \text{ est un sommet de } T\}$  de  $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$ , muni de la pseudodistance  $d((T_1, g_1), (T_2, g_2)) = d(g_1^{-1}.T_1, g_2^{-1}.T_2)$ . Alors  $\mathcal{T}$  est le quotient de  $\widetilde{\mathcal{T}}$  par l'action diagonale de  $G$  sur  $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$ . Chaque classe d'équivalence  $\mathcal{R}[T]$  est obtenue par passage au quotient à partir de l'orbite de  $(T, e)$ . L'ensemble  $\widetilde{U}_{(T_1, g_1)} = \overline{B}_{\mathcal{G}}((T_1, g_1), e^{-1}) = \{(T_2, g_2) \in \widetilde{\mathcal{T}}/\overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e, 1) = \overline{B}_{g_2^{-1}.T_2}(e, 1)\}$  est un ouvert-fermé qui se projette sur l'ouvert-fermé  $U_{g_1^{-1}.T_1} = \overline{B}_{\mathcal{G}}(g_1^{-1}.T_1, e^{-1})$ . Puisque  $\overline{B}_{\mathcal{G}}(e, 1)$  ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, les ensembles  $\widetilde{U}_{(T_1, g_1)}$  et  $U_{g_1^{-1}.T_1}$  définissent des partitions finies de  $\widetilde{\mathcal{T}}$  et  $\mathcal{T}$  respectivement. Nous allons remplacer  $\widetilde{\mathcal{T}}$  par l'ensemble  $\widetilde{\mathcal{T}}$  des couples  $(T, x)$  où  $x$  est un point quelconque de  $T$  qui peut appartenir à l'intérieur  $\mathring{e}$  d'une arête  $e$  de  $T$ . L'application  $\psi_{(T_1, g_1)} : ((T_2, g_2), x) \in \widetilde{U}_{(T_1, g_1)} \times \overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e, 1) \mapsto (T_2, g_2.x) \in \widetilde{\mathcal{T}}$  est injective en restriction aux ensembles  $\widetilde{U}_{(T_1, g_1)} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e, \frac{1}{2})$  et  $\widetilde{U}_{(T_1, g_1)} \times \mathring{e}$ . Leurs images  $\widetilde{V}_{(T_1, g_1)}$  et  $\widetilde{V}_{(T_1, g_1)}^e$  sont munies de topologies telles que les restrictions et leurs inverses  $\widetilde{\varphi}_{(T_1, g_1)} : \widetilde{V}_{(T_1, g_1)} \rightarrow \widetilde{U}_{(T_1, g_1)} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e, \frac{1}{2})$  et  $\widetilde{\varphi}_{(T_1, g_1)}^e : \widetilde{V}_{(T_1, g_1)}^e \rightarrow \widetilde{U}_{(T_1, g_1)} \times \mathring{e}$  sont des homéomorphismes. On munit  $\widetilde{\mathcal{T}}$  de la topologie faible pour laquelle  $\widetilde{V}_{(T_1, g_1)}$  et  $\widetilde{V}_{(T_1, g_1)}^e$  forment un recouvrement ouvert fini. On vérifie aisément que :

- i) l'espace  $\widetilde{\mathcal{T}}$  est réalisé comme un sous-espace compact de  $\widetilde{\mathcal{T}}$ ,
- ii) l'action de  $G$  sur  $\widetilde{\mathcal{T}}$  s'étend en une action de  $G$  sur  $\widetilde{\mathcal{T}}$ ,
- iii) les cartes locales  $\widetilde{\varphi}_{(T_1, g_1)}$  et  $\widetilde{\varphi}_{(T_1, g_1)}^e$  forment un atlas feuilleté sur  $\widetilde{\mathcal{T}}$  qui définit un feuilletage par graphes  $\widetilde{\mathcal{T}}$  invariant par l'action de  $G$ .

Soit  $\mathcal{T}$  le quotient de  $\widetilde{\mathcal{T}}$  par l'action de  $G$ . Alors les applications

$$\psi_{g_1^{-1}.T_1} : (g_2^{-1}.T_2, x) \in U_{g_1^{-1}.T_1} \times \overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e, 1) \mapsto x^{-1}.(g_2^{-1}.T_2) \in \mathcal{T}$$

définissent des cartes locales

$$\varphi_{g_1^{-1}.T_1} : V_{g_1^{-1}.T_1} \rightarrow U_{g_1^{-1}.T_1} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e, \frac{1}{2}) \quad \text{et} \quad \varphi_{g_1^{-1}.T_1}^e : V_{g_1^{-1}.T_1}^e \rightarrow U_{g_1^{-1}.T_1} \times \mathring{e}$$

et donc l'espace  $\mathcal{T}$  possède un atlas feuilleté fini. Il est compact car les plaques sont relativement compactes et les transversales sont compactes.  $\square$

**2.3. Structure transverse.** — Nous allons préciser ici la notion de *dynamique transverse* (*mesurable* ou *topologique*) utilisée dans la introduction. D'abord, la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est définie par l'action d'un pseudogroupe de transformations  $\Gamma$  engendré par les translations  $\tau_g : T \mapsto g^{-1}.T$  associées aux éléments de  $G$ . Chacune de ces applications est définie sur l'ouvert-fermé  $D_g = \{T \in \mathcal{T}/g \in T\}$  de  $\mathcal{T}$ . Le théorème 2.2.1 montre que  $\Gamma$  est le *pseudogroupe d'holonomie de  $\mathcal{T}$  réduit à  $\mathcal{T}$* . Nous utiliserons donc la notion de *dynamique transverse* introduite par A. Haefliger [6].

Néanmoins, si l'holonomie est triviale, la dynamique transverse est représentée par la relation d'équivalence induite sur toute transversale complète. Rappelons qu'une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur un espace borélien standard  $X$  est *mesurable discrète* si les classes d'équivalence sont dénombrables et si le graphe est un borélien de  $X \times X$ . On appelle *transformation partielle de  $\mathcal{R}$*  tout isomorphisme borélien  $\varphi : A \rightarrow B$  entre parties boréliennes de  $X$  dont le graphe  $G(\varphi) = \{(x, y) \in X \times X/y = \varphi(x)\} \subset \mathcal{R}$ . Une mesure borélienne  $\mu$  sur  $X$  est dite *invariante pour  $\mathcal{R}$*  si elle est invariante pour toute transformation partielle  $\varphi$ , i.e.  $\mu(\varphi^{-1}(B')) = \mu(B')$  pour tout borélien  $B' \subset B$ . La relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$  est mesurable discrète car les classes d'équivalence sont dénombrables et le graphe de  $\mathcal{R}$  est un borélien de  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$  en tant que réunion des graphes des transformations partielles  $\tau_g$  définies sur les ouverts-fermés  $\overline{B}_{\mathcal{T}}(T, e^{-1})$  (avec  $g \in \overline{B}_T(e, 1)$ ) et de leurs compositions.

**Définition 2.3.1.** — Deux relations d'équivalence mesurées  $(\mathcal{R}, X, \mu)$  et  $(\mathcal{R}', X', \mu')$  sont dites :

- i) *orbitalement équivalentes* si  $X$  et  $X'$  contiennent des boréliens  $Y$  et  $Y'$  saturés pour  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  et de mesure totale pour lesquels il existe un isomorphisme borélien  $\varphi : Y \rightarrow Y'$  tel que  $\varphi(\mathcal{R}[x]) = \mathcal{R}'[\varphi(x)]$  pour  $\mu$ -presque tout  $x \in Y$  et  $f_*\mu \sim \mu'$  ;
- ii) *stablement orbitalement équivalentes* si  $X$  et  $X'$  contiennent des boréliens  $Y$  et  $Y'$  dont les saturés pour  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont de mesure totale tels que les relations d'équivalence induites  $\mathcal{R}|_Y$  et  $\mathcal{R}'|_{Y'}$  sont orbitalement équivalentes. Nous dirons alors que  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  représentent une même *dynamique mesurable*.

Toute relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur un espace borélien ou topologique  $X$  est munie d'une structure naturelle de groupoïde caractérisée par les données suivantes : l'inclusion  $\varepsilon : x \in X \mapsto (x, x) \in \mathcal{R}$  de l'espace des unités  $X$  dans  $\mathcal{R}$ , les projections  $\beta : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto x \in X$  et  $\alpha : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto y \in X$ , l'ensemble des couples composables  $\mathcal{R} * \mathcal{R} = \{((x, y), (x', y')) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}/\alpha(x, y) = y = x' = \beta(x', y')\}$ , la multiplication partielle  $\mu : ((x, y), (x', y')) \in \mathcal{R} * \mathcal{R} \mapsto (x, y')$  et l'inversion

$\iota : (x, y) \in \mathcal{R} \rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$ . La relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est dite *topologique* si elle l'est comme groupoïde, c'est-à-dire si le graphe de  $\mathcal{R}$  est muni d'une topologie (qui en fait un espace localement compact séparé) telle que  $\alpha, \beta : \mathcal{R} \rightarrow X$  et  $\mu : \mathcal{R} * \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  sont continues et  $\iota : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  est un homéomorphisme. Une telle relation d'équivalence est dite  $\beta$ -discrète si  $X$  est ouvert dans  $\mathcal{R}$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{T}$  et tout élément  $g$  de  $G$ , notons  $O(U, g) = \{(T, g^{-1}.T) \in \mathcal{R}/T \in U \cap D_g\}$  le graphe de la translation  $\tau_g$  restreinte à  $U$ . Les ensembles  $O(U, g)$  engendrent une topologie sur  $\mathcal{R}$ , plus fine que celle induite par la topologie produit sur  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ , qui en fait une relation d'équivalence topologique  $\beta$ -discrète.

**Définition 2.3.2.** — Deux relations d'équivalence  $\beta$ -discrètes  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sur  $X$  et  $X'$  sont dites *stablement orbitalement équivalentes* (resp. *isomorphes*) si  $X$  et  $X'$  contiennent des ouverts  $Y$  et  $Y'$  qui rencontrent toutes les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  tels que les relations d'équivalence induites  $\mathcal{R}|_Y$  et  $\mathcal{R}'|_{Y'}$  sont orbitalement équivalentes (resp. isomorphes).

**2.4. Réalisation géométrique.** — La donnée d'un système fini de générateurs  $S$  de  $G$  fournit un système fini de générateurs  $\Sigma = \{\tau_g/g \in S\}$  de  $\Gamma$ . Par analogie avec l'action d'un groupe, l'orbite  $\Gamma(T) = \mathcal{R}[T]$  est l'ensemble des sommets d'un graphe  $\bar{\Gamma}(T) = \overline{\mathcal{R}[T]}$ , muni de la distance  $d_\Sigma$  définie par la longueur des  $\Sigma$ -mots. Nous dirons alors que  $(\mathcal{R}, \mathcal{T}, \Sigma)$  est une *relation d'équivalence graphée* et que  $(\Gamma, \mathcal{T}, \Sigma)$  un *pseudogroupe graphé*. Dans [8], le deuxième auteur a prouvé l'extension suivante du théorème 2.2.1 :

**Théorème de réalisation géométrique 2.4.1.** — *Soit  $\Gamma$  un pseudogroupe de transformations d'un espace localement compact, métrisable et séparable  $X$ , muni d'un système fini de générateurs  $\Sigma$ . Si la fonction de valence  $\text{val} : X \rightarrow \mathbb{N}$  est continue, il existe un espace feuilleté localement compact, métrisable et séparable  $(\mathbf{X}, \mathcal{F})$  tel que  $X$  est un fermé qui rencontre toute les feuilles de  $\mathcal{F}$  et  $\Gamma$  est le pseudogroupe d'holonomie de  $\mathcal{F}$  réduit à  $X$ . En outre, si  $X$  est compact, alors  $\mathbf{X}$  l'est aussi.*

**Théorème de épaississement 2.4.2.** — *Soit  $(\mathbf{X}, \mathcal{F})$  un espace feuilleté par graphes localement finis tel que  $\Gamma$  admet un système de générateurs dont les domaines et les rangs sont ouverts et fermés dans  $X$ . Il existe une lamination par surfaces de Riemann  $(\mathbf{M}, \mathcal{L})$  dont le pseudogroupe d'holonomie réduit à  $X$  est égal à  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* — Fixons un entier  $k \geq 1$  et un réel  $\varepsilon > 0$ . Considérons la sphère  $S_\varepsilon^2$  de rayon  $\varepsilon$ , munie de la métrique usuelle, puis ôtons une famille de boules géodésiques  $\bar{B}(s_1, 2r), \dots, \bar{B}(s_k, 2r)$  de même rayon  $2r > 0$  et deux à deux disjointes. Considérons le cylindre  $C = S_r^1 \times [0, \frac{3}{4}[$ . Pour tout  $1 \leq i \leq k$ , l'application exponentielle permet de définir un difféomorphisme entre la couronne  $C_i = \bar{B}(s_i, 2r) - B(s_i, r)$  et le cylindre  $S_r^1 \times [0, r]$  qui identifie chaque sphère géodésique de centre  $s_i$  et rayon  $r \leq t \leq 2r$  avec le cercle  $S_r^1 \times \{2r - t\}$ . En recollant  $k$  copies du cylindre  $C$  à la sphère trouée, on obtient une surface  $P(k)$  appelée une *pieuvre à  $k$  bras*. Les métriques riemanniennes sur les deux parties de la pieuvre se recollent en une métrique riemannienne qui coïncide

avec les métriques de départ hors d'un voisinage tubulaire de  $C_1 \cup \dots \cup C_k$ . Un choix convenable du rayon  $r > 0$  permet de supposer que le cylindre  $S_r^1 \times ]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$  ne coupe pas ce voisinage. Nous noterons  $P'(k)$  la pieuvre obtenue en remplaçant l'intervalle  $[0, \frac{3}{4}[$  par le sous-intervalle  $[0, \frac{1}{2}[$ .

Notons  $X^{\text{val}=k}$  l'ensemble des sommets  $x \in X$  tels que  $\text{val}(x) = k$  et  $\Sigma_x$  l'ensemble d'arêtes  $\sigma$  issues de  $x$ . Soit  $\sigma^{-1}$  l'arête opposée, issue de l'extrémité  $\sigma(x)$  de  $\sigma$ . Pour tout  $x \in X^{\text{val}=k}$ , l'ensemble  $\Sigma_x$  permet d'étiqueter les bras de  $P(k)$ . Soit  $\mathbf{M}$  le quotient de la réunion disjointe  $\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} X^{\text{val}=k} \times P(k)$  par la relation d'équivalence qui identifie le point  $(x, z, t)$  du cylindre  $\{x\} \times S_r^1 \times ]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$  contenu dans le bras de la pieuvre  $\{x\} \times P(k)$  d'étiquette  $\sigma \in \Sigma_x$  avec le point  $(\sigma(x), \bar{z}, 1-t)$  du cylindre  $\sigma(x) \times S_r^1 \times ]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$  contenu dans le bras de la pieuvre  $\sigma(x) \times P(k')$  d'étiquette  $\sigma^{-1} \in \Sigma_{\sigma(x)}$ . Ici  $\bar{z}$  est le conjugué de  $z$  et  $k' = \text{val}(\sigma(x))$ . Soit  $\pi$  la projection. La donnée d'un atlas feuilleté sur  $X$  (construit par le procédé décrit dans [8]) entraîne l'existence d'un atlas feuilleté sur  $\mathbf{M}$  définissant une lamination  $\mathcal{L}$ . La feuille  $L_x$  passant par  $x$  est la réunion des surfaces  $\pi(\{y\} \times P(\text{val}(y)))$  associés aux sommets  $y$  de la feuille de  $\mathcal{F}$  passant par  $x$ . En général, ces surfaces ne sont pas difféomorphes aux pieuvres  $P(\text{val}(y))$  car certaines arêtes issues de  $y$  peuvent être des boucles. Néanmoins, en remplaçant  $P(\text{val}(y))$  par  $P'(\text{val}(y))$ , nous obtiendrons des vraies plaques  $\pi(\{y\} \times P'(\text{val}(y)))$  difféomorphes aux pieuvres  $P'(\text{val}(y))$ . En ajoutant les images des bras  $\{y\} \times S_r^1 \times ]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$  d'étiquette  $\sigma \in \Sigma_y$ , on décrit la feuille  $L_x$  comme réunion de plaques de  $\mathcal{L}$ . Puisque les bras des pieuvres sont recollés à l'aide des difféomorphismes qui préservent l'orientation,  $L_x$  est une surface de Riemann orientable. L'inclusion naturelle de  $\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} X^{\text{val}=k}$  dans  $\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} X^{\text{val}=k} \times P(k)$  passe au quotient en un plongement fermé de l'espace de sommets  $X$  dans  $\mathbf{M}$ . En identifiant  $X$  avec son image dans  $\mathbf{M}$ , on voit que la trace de la feuille  $L_x$  coïncide avec l'ensemble de sommets de la feuille de  $\mathcal{F}$  passant par  $x$ .  $\square$

**2.5. Graphes répétitifs et ensembles minimaux.** — Le but de ce paragraphe est de caractériser les ensembles minimaux de  $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$  et  $(\mathbf{M}, \mathcal{L})$  en adaptant la *propriété d'isomorphisme local* des pavages [1, 9].

**Définition 2.5.3.** — i) Fixons un couple  $T, T' \in \mathcal{F}$ . Nous dirons qu' $T'$  contient une copie fidèle de la boule  $B_T(x, r)$  et nous écrirons  $B_T(x, r) \hookrightarrow T'$  s'il existe  $g \in G$  tel que  $g.B_T(x, r) = B_{T'}(g.x, r) \subset T'$ .

ii) Nous dirons qu'un graphe  $T \in \mathcal{F}$  est *répétitif* si pour tout entier  $r > 0$ , il existe un entier  $R > 0$  tel que  $B_T(x, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  pour tout couple  $x, y \in T$ .

Nous adaptons ici une version uniforme de la propriété d'isomorphisme local usuelle. En fait, pour les pavages de type fini, les deux propriétés sont équivalentes. L'analogue pour les graphes fait partie du critère de minimalité suivant (dont l'équivalence (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) a été prouvée dans [2, 4]) :

**Théorème 2.5.4.** — Pour tout  $T \in \mathcal{F}$ , considérons l'ensemble fermé  $X = \overline{\mathcal{R}[T]}$  saturé pour  $\mathcal{R}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :



- i) le graphe  $T$  est répétitif;
- ii) pour tout  $r > 0$ , il existe  $R > 0$  tel que  $B_T(e, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  pour tout  $y \in T$ ;
- iii) l'ensemble  $X$  est minimal.

*Démonstration.* — Il suffit de prouver (iii)  $\Rightarrow$  (i), mais il convient avant de rappeler brièvement (iii)  $\Rightarrow$  (ii). Pour cela, à tout réel  $r > 0$ , on lui associe une suite croissante d'ouverts  $U_R = \{ T' \in X / B_T(e, r) \hookrightarrow B_{T'}(e, R) \}$  (avec  $R \geq 1$ ) qui recouvrent  $X$ . Puisque  $X$  est compact, il existe  $R > 0$  tel que  $X = U_R$ . Pour tout  $x \in T$ , le graphe  $x^{-1}.T \in U_R$  et donc  $B_T(e, r) \hookrightarrow B_{x^{-1}.T}(e, R)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $g \in G$  tel que :  $g.B_T(e, r) = B_{x^{-1}.T}(g, r) \subset B_{x^{-1}.T}(e, R)$ . Alors on a :

$$h.B_T(e, r) = x.B_{x^{-1}.T}(g, r) = B_T(h, r) \subset x.B_{x^{-1}.T}(e, R) = B_T(x, R)$$

avec  $h = xg$  et  $B_T(e, r) \hookrightarrow B_T(x, R)$ . Pour démontrer (iii)  $\Rightarrow$  (i), fixons un réel  $r > 0$  et un point  $x \in T$ . Comme auparavant, l'ensemble  $X$  est recouvert par une suite croissante d'ouverts  $U_R^x = \{ T' \in X / B_T(x, r) \hookrightarrow B_{T'}(e, R) \}$  et il existe  $R > 0$ , qui dépend de  $r$  et  $x$ , tel que  $B_T(x, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  pour tout  $y \in T$ . Pour conclure, il faut pouvoir choisir  $R > 0$  indépendant du point  $x$ . Remarquons tout d'abord que pour tout sommet  $g$  de  $\mathcal{G}$ , la boule  $B_{\mathcal{G}}(g, r) = g.B_{\mathcal{G}}(e, r)$ . Rappelons aussi que la compacité  $\mathcal{T}$  provient du fait que  $B_{\mathcal{G}}(e, r)$  ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes. Il en est de même pour  $B_{\mathcal{G}}(g, r)$ . En fait, à translation près, il n'y a qu'un nombre fini de boules de rayon  $r > 0$  distinctes. Considérons une famille finie de points  $x_1, \dots, x_n \in T$  de manière que les boules  $B_T(x_i, r)$  représentent toutes les classes de translations possibles. Pour tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  $y \in T$ , on a  $B_T(x_i, r) \hookrightarrow B_T(y, R(r, x_i))$ . Si on pose  $R = \max\{R(r, x_1), \dots, R(r, x_n)\}$ , alors  $B_T(x, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  pour tout couple  $x, y \in T$ .  $\square$

### 3. L'espace feuilleté de Ghys–Kenyon

Nous donnons ici une nouvelle construction de l'espace feuilleté de Ghys–Kenyon [4], que n'utilise pas l'arbre de Kenyon [4, 7], mais ses règles de construction.

**3.1. L'arbre de Kenyon et l'espace feuilleté de Ghys–Kenyon.** — Nous allons commencer par rappeler la construction de l'arbre de Kenyon. Soient  $\mathcal{Z}^2$  le graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$ , muni du système de générateurs  $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ , et  $T_1$  le sous-arbre de  $\mathcal{Z}^2$  décrit dans la figure 3.

Cet arbre est translaté ensuite par le vecteur  $(0, 2)$ , puis l'image est tournée à l'aide des rotations d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$ . L'élagage des arêtes terminales contenues dans l'axe horizontal fournit un arbre  $T_2$ . Si on répète ce procédé, on obtient de même un arbre  $T_3$ . Par récurrence, on obtient une suite d'arbres  $T_n$  qui rencontrent les axes horizontal et vertical suivant les intervalles  $[-2^n + 1, 2^n - 1] \times \{0\}$  et  $\{0\} \times [-2^n, 2^n]$  respectivement. Nous appellerons *arbre de Kenyon* la réunion  $T_\infty = \bigcup_{n \geq 1} T_n \subset \mathcal{Z}^2$ . C'est un arbre apériodique et répétitif ayant 4 bouts.

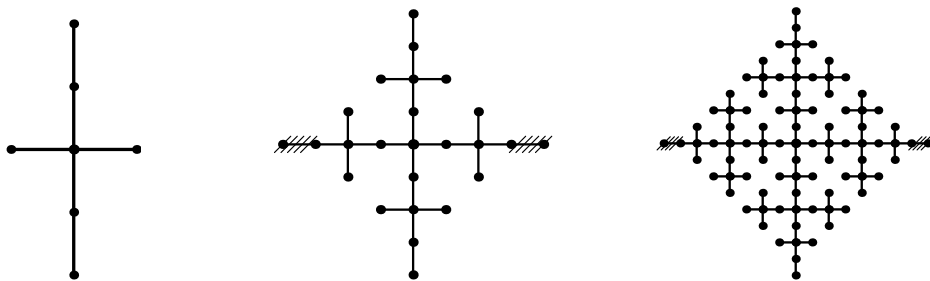


FIGURE 3. Les arbres  $T_1, T_2$  et  $T_3$

Nous appellerons *minimal de Ghys-Kenyon* l'ensemble  $X = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]}$ . D'après les théorèmes 2.2.1 et 2.4.1, il existe un feuilletage par graphes  $\mathcal{F}$  d'un espace compact  $\mathbf{X}$  pour lequel  $X$  est une transversale complète et  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence induite par  $\mathcal{F}$ . Nous appellerons *espace feuilleté de Ghys-Kenyon* ce minimal de l'espace feuilleté de Gromov-Hausdorff  $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ . En fait, grâce au théorème 2.4.2, on peut remplacer  $(\mathbf{X}, \mathcal{F})$  par une vraie lamination par surfaces de Riemann  $(M, \mathcal{L})$ , appelée *lamination de Ghys-Kenyon*.

**3.2. Codage des feuilles.** — Nous allons reconstruire le minimal de Ghys-Kenyon à l'aide d'une application  $\Phi : \mathcal{J}_4 \rightarrow X$  qui, à toute suite  $\alpha = \alpha_0 \alpha_1 \dots \in \mathcal{J}_4 = \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}_4^{\mathbb{N}}$ , associe un arbre apériodique et répétitif  $\Phi(\alpha)$  dans l'enveloppe de  $T_\infty$ . Nous construirons  $\Phi(\alpha)$  de proche en proche en partant du sommet  $x_0 = 0$  et de l'arbre trivial  $P_0 = \{0\}$ . Pour cela, nous commençons par identifier les éléments de  $\mathbb{Z}_4$  avec les racines quatrièmes de l'unité grâce à l'application  $\mathbf{r} : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $\mathbf{r}(k) = e^{\frac{\pi}{2} ik}$ . Nous joignons les sommets  $x_0$  et  $x_1 = \mathbf{r}(\alpha_0)$  par une arête de  $\mathbb{Z}^2$ , puis nous prenons la réunion des images de cette arête par les rotations de centre  $x_1$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}, \pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$ . Nous obtenons ainsi un arbre  $P_1 = \Phi(\alpha_0)$ . Considérons ensuite l'unique arête de  $\mathbb{Z}^2$  qui joint le sommet  $x_2 = x_1 + 2\mathbf{r}(\alpha_1)$  avec un sommet de  $P_1$ . Nous appelons  $P_2 = \Phi(\alpha_0 \alpha_1)$  la réunion de l'arbre  $P_1$  et leurs images par les rotations de centre  $x_1$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}, \pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$ . Par récurrence, nous avons une suite de sommets  $x_n = x_{n-1} + 2^{n-1} \mathbf{r}(\alpha_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \mathbf{r}(\alpha_i)$  et une suite croissante de sous-arbres finis  $P_n$  de  $\mathbb{Z}^2$ . Alors  $\Phi(\alpha) = \bigcup_{n \geq 0} P_n = \bigcup_{n \geq 0} \Phi(\alpha_0 \dots \alpha_{n-1})$  est un arbre apériodique et répétitif ayant au plus 2 bouts. Nous appellerons *squelette de  $\Phi(\alpha)$*  la suite de sommets  $x_0 x_1 \dots x_n \dots$  identifiée au chemin d'arêtes obtenu en joignant les sommets  $x_n$  et  $x_{n+1}$  par  $2^n$  arêtes dans la direction  $\mathbf{r}(\alpha_i)$ . Nous venons de définir une application  $\Phi : \mathcal{J}_4 \rightarrow \mathcal{F}$ .

**Proposition 3.1.** — *Le minimal de Ghys-Kenyon  $X$  est l'enveloppe  $\overline{\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]}$  de tout arbre codé  $\Phi(\alpha)$ . Il se décompose en la réunion disjointe de la classe  $\mathcal{R}[T_\infty]$  et de l'ensemble saturé  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}_4} \mathcal{R}[\Phi(\alpha)]$ .*