

SUR QUELQUES REPRÉSENTATIONS POTENTIELLEMENT CRISTALLINES DE $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

par

Laurent Berger & Christophe Breuil

Résumé. — On associe aux représentations p -adiques irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de dimension 2 devenant cristallines sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$ des espaces de Banach p -adiques $B(V)$ munis d’une action linéaire continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Lorsque V est de plus φ -semi-simple, on utilise le (φ, Γ) -module et le module de Wach de V pour montrer que la représentation $B(V)$ est non nulle, topologiquement irréductible et admissible.

Abstract (On some potentially crystalline representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$). — To each 2-dimensional irreducible p -adic representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ which becomes crystalline over an abelian extension of $\mathbf{Q}_p$, we associate a Banach space $B(V)$ endowed with a linear continuous unitary action of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. When V is moreover φ -semi-simple, we use the (φ, Γ) -module and the Wach module associated to V to show that the representation $B(V)$ is nonzero, topologically irreducible and admissible.

1. Introduction

1.1. Introduction. — Soit p un nombre premier et $n \in \mathbf{N}$. Dans la recherche d’une correspondance éventuelle entre (certaines) représentations p -adiques V de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de dimension n et (certaines) représentations p -adiques $B(V)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$, un des cas importants à regarder est certainement celui où $n = 2$, V est absolument irréductible, devient cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$ et est φ -semi-simple. Cette dernière condition signifie que le Frobenius φ sur le φ -module filtré $D_{\mathrm{cris}}(V)$ associé par Fontaine à V est semi-simple. La représentation V a des poids de Hodge-Tate distincts $i_1 < i_2$ et, si l’on note $\mathrm{Alg}(V)$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ de plus haut poids $(i_1, i_2 - 1)$ et $\mathrm{Lisse}(V)$ la représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ associée par la correspondance locale de Hecke à la représentation de Weil déduite de V par [21], la représentation $B(V)$ est simplement le complété p -adique de la représentation localement algébrique $\mathrm{Alg}(V) \otimes \mathrm{Lisse}(V)$

Classification mathématique par sujets (2010). — 11F.

Mots clefs. — Représentations galoisiennes cristabélines, correspondance de Langlands p -adique, (φ, Γ) -modules.

par rapport à un réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et de type fini sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Notons que $\mathrm{Lisse}(V)$ est toujours ici une représentation de la série principale. Ainsi, $B(V)$ est un espace de Banach p -adique muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (i.e. laissant une norme invariante). Notons que, lorsque $\mathrm{Lisse}(V)$ est de dimension 1, cette définition de $B(V)$ doit être modifiée.

Le problème est qu'il n'est pas du tout évident qu'un tel réseau existe, ou, de manière équivalente, que $B(V)$ soit non nul. Dans [5, théorème 1.3], la non nullité de $B(V)$ est démontrée lorsque V est cristalline et $i_2 - i_1 < 2p$ (essentiellement), et dans [6, théorème 1.3.3], son admissibilité (au sens de [28]) et son irréductibilité topologique (avec une condition supplémentaire pour cette dernière). La méthode repose sur le calcul de la réduction d'une boule unité de $B(V)$ modulo l'idéal maximal des coefficients.

Lorsque V est de dimension 2, absolument irréductible mais cette fois semi-stable non cristalline, $B(V)$ est défini dans [6] et [7] et des conjectures analogues (non nullité, admissibilité, etc.) formulées et très partiellement démontrées. Dans [14], Pierre Colmez a vu que la théorie des (φ, Γ) -modules de Fontaine permettait de démontrer élégamment ces conjectures dans le cas semi-stable en construisant un modèle de la restriction au Borel supérieur de la représentation duale $B(V)^*$ à partir du (φ, Γ) -module de V .

Il était donc naturel de regarder si un tel modèle existait aussi dans le cas des représentations V potentiellement cristallines ci-dessus et s'il permettait de démontrer les conjectures de non nullité, d'irréductibilité et d'admissibilité. La réponse est affirmative et fait l'objet du présent article. Comme dans [14], on démontre donc un isomorphisme Borel-équivariant entre $B(V)^*$ et $(\varprojlim_{\psi} D(V))^b$ (théorème 5.2.7) où $D(V)$ est le (φ, Γ) -module associé à la représentation potentiellement cristalline V et où la limite projective consiste en les suites ψ -compatibles bornées d'éléments de $D(V)$. Pour montrer cet isomorphisme, il est nécessaire d'une part d'étendre au cas potentiellement cristallin considéré la théorie des modules de Wach de [2] et [32] et d'autre part de passer par une description intermédiaire de $B(V)$ comme espace de fonctions continues sur $\mathbf{Q}_p$ d'un certain type (théorème 4.3.1). Les résultats côté (φ, Γ) -modules permettent alors de déduire le résultat principal de cet article (§5.3) :

Théorème. — *Si V est une représentation p -adique absolument irréductible de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, qui devient cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$ et qui est φ -semi-simple, alors $B(V)$ est non nul, topologiquement irréductible et admissible.*

On obtient aussi deux autres corollaires, l'un concernant tous les réseaux possibles stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ dans $\mathrm{Alg}(V) \otimes \mathrm{Lisse}(V)$ (corollaire 5.3.4), l'autre concernant les vecteurs localement analytiques dans $B(V)$ (corollaires 5.3.6 et 5.4.3).

D'autres isomorphismes du type $B(V)^* \simeq (\varprojlim_{\psi} D(V))^b$ sont démontrés lorsque V est trianguline non de Rham dans [14], mais les méthodes d'analyse p -adique côté $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ y sont sensiblement différentes. Ici, on utilise de manière essentielle l'existence d'un entrelacement entre deux façons d'écrire la série principale $\mathrm{Lisse}(V)$

(correspondant essentiellement aux deux façons d'ordonner les caractères que l'on induit), entrelacement qui « passe à la complétion p -adique » et permet de définir un *entrelacement p -adique* entre deux façons d'écrire le Banach $B(V)$. On s'aperçoit alors que cet entrelacement p -adique a une interprétation en théorie de Hodge p -adique : si deux distributions de $B(V)^*$ se correspondent par cet entrelacement (on ne distingue pas ici les deux manières d'écrire $B(V)$), alors les deux éléments qu'on leur associe dans $(\varprojlim_{\psi} D(V))^b$ sont reliés par une condition équivalente à la donnée de la *filtration de Hodge* sur $D_{\text{cris}}(V)$ (voir §5.1 et lemme 5.2.3).

Lorsque V n'est pas φ -semi-simple, signalons que $B(V)^*$ et $(\varprojlim_{\psi} D(V))^b$ sont toujours définis mais que l'on ignore s'ils sont naturellement isomorphes (l'entrelacement ci-dessus est dans ce cas l'identité).

Une première version de cet article (octobre 2004), dont une version préliminaire avait fait l'objet d'un cours au C.M.S. de Hangzhou en août 2004 ([4]), ne traitait que le cas des représentations cristallines.

1.2. Notations. — On fixe $\overline{\mathbf{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$, on note « val » la valuation sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ telle que $\text{val}(p) \stackrel{\text{déf}}{=} 1$, $|\cdot|$ la norme p -adique $|x| \stackrel{\text{déf}}{=} p^{-\text{val}(x)}$ et $\mathbf{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour $|\cdot|$. On normalise l'isomorphisme de la théorie du corps de classes local en envoyant les uniformisantes sur les Frobenius géométriques. On note ε le caractère cyclotomique p -adique de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ vu aussi comme caractère de $\mathbf{Q}_p^\times$. En particulier, $\varepsilon(p) = 1$ et $\varepsilon|_{\mathbf{Z}_p^\times} : \mathbf{Z}_p^\times \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ est l'identité. On note $\text{nr}(x)$ le caractère non ramifié de $\mathbf{Q}_p^\times$ envoyant p sur x . On désigne par L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, $\mathcal{O}_L$ son anneau d'entiers, k_L son corps résiduel et π_L une uniformisante. On note V une représentation p -adique de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, c'est-à-dire un L -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, et T un $\mathcal{O}_L$ -réseau de V stable par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. Enfin, $B(\mathbf{Q}_p)$ désigne les matrices triangulaires supérieures dans $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ et $B(\mathbf{Z}_p)$ le sous-groupe de ces matrices qui sont dans $GL_2(\mathbf{Z}_p)$.

On note F_n l'extension finie de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ engendrée par les racines p^n -ièmes de l'unité et $F_\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{n \geq 0} F_n$. On fixe dans tout cet article le choix d'une suite compatible $(\zeta_{p^n})_{n \geq 0}$ de racines primitives p^n -ièmes de l'unité. Le groupe de Galois $\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_p^\times$ via le caractère cyclotomique et si $n \geq 1$, alors $\Gamma_n \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon^{-1}(1 + p^n \mathbf{Z}_p)$ s'identifie au groupe de Galois $\text{Gal}(F_\infty/F_n)$. On note $L_n = L \otimes_{\mathbf{Q}_p} F_n$, ce qui fait que L_n est un produit de corps et un $L_n[\Gamma]$ -module simple. Si $\eta : \Gamma \rightarrow \mathcal{O}_L^\times$ est un caractère fini à valeurs dans L , on note $G(\eta)$ la somme de Gauss associée à η : si $\eta = 1$, alors $G(\eta) = 1$ et si η est de conducteur $n = n(\eta) \geq 1$, alors $G(\eta) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_n} \eta^{-1}(\gamma) \otimes \gamma(\zeta_{p^n}) \in L_n$. On vérifie facilement les propriétés suivantes des sommes de Gauss :

- (i) si $g \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, alors $g(G(\eta)) = \eta(g)G(\eta)$ (g agissant linéairement sur L) ;
- (ii) on a $G(\eta) \cdot G(\eta^{-1}) = p^{n(\eta)}\eta(-1)$ et en particulier $G(\eta) \in L_n^\times$.

Tous les espaces de Banach B de ce texte sont p -adiques et tels que $\|B\| \subseteq |L|$. On appelle $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -Banach unitaire un espace de Banach B muni d'une action à gauche L -linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ telle que les applications $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \rightarrow B$, $g \mapsto gv$ sont continues pour tout $v \in B$ et telle que, pour un choix de norme $\|\cdot\|$ sur B , on a $\|gv\| = \|v\|$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et tout $v \in B$. Un $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -Banach unitaire est dit admissible (suivant [28]) si le Banach dual est de type fini sur $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)]]$ où $\mathcal{O}_L[[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)]] \stackrel{\text{déf}}{=} \varprojlim \mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)/H]$, la limite projective étant prise sur les sous-groupes de congruences principaux H de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

2. Représentations p -adiques

2.1. Quelques anneaux de séries formelles. — Le but de ce paragraphe est d'introduire certains anneaux de séries formelles ($\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^+$, $\mathcal{R}^+$, $\mathcal{E}^\dagger$ et $\mathcal{R}$), ainsi que certaines des structures dont ils sont munis et dont nous avons besoin dans la suite de cet article. On commence par rappeler succinctement les définitions de ces divers anneaux.

- (i) On note $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ l'anneau formé des séries $\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i$ telles que $a_i \in \mathcal{O}_L$ et $a_{-i} \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow +\infty$. C'est un anneau local de corps résiduel $k_L((X))$.
- (ii) On note $\mathcal{E} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}[1/p]$, c'est un corps local de dimension 2.
- (iii) On note $\mathcal{E}^+ \stackrel{\text{déf}}{=} L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[X]]$.
- (iv) On note $\mathcal{R}^+$ l'anneau des séries formelles $f(X) \in L[[X]]$ qui convergent sur le disque unité, ce qui fait que $\mathcal{E}^+$ s'identifie au sous-anneau de $\mathcal{R}^+$ constitué des séries formelles à coefficients bornés.
- (v) On note $\mathcal{E}^\dagger$ le sous-corps de $\mathcal{E}$ constitué des séries $f(X) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i$ telles qu'il existe $\rho < 1$ pour lequel $|a_{-i}| \rho^{-i} \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow +\infty$.
- (vi) On note $\mathcal{R}$ l'anneau formé des séries $\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i$ telles que $a_i \in L$, telles qu'il existe $\rho < 1$ pour lequel $|a_{-i}| \rho^{-i} \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow +\infty$, et telles que pour tout $\sigma < 1$, on ait $|a_i| \sigma^i \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow +\infty$. Le corps $\mathcal{E}^\dagger$ s'identifie alors au sous-anneau de $\mathcal{R}$ constitué des séries formelles à coefficients bornés.

Le corps $\mathcal{E}$ est muni de la norme de Gauss $\|\cdot\|_{\text{Gauss}}$ définie par $\|f(X)\|_{\text{Gauss}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{i \in \mathbf{Z}} |a_i|$ si $f(X) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i$. L'anneau des entiers de $\mathcal{E}$ pour cette norme est $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, et la norme de Gauss induit sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ la topologie π_L -adique. L'application naturelle $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \rightarrow k_L((X))$ est alors continue si l'on donne à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ la topologie π_L -adique et à $k_L((X))$ la topologie discrète.

On peut définir une topologie moins fine sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, la topologie faible, définie par le fait que les $\{\pi_L^i \mathcal{O}_{\mathcal{E}} + X^j \mathcal{O}_L[[X]]\}_{i,j \geq 0}$ forment une base de voisinages de zéro, et la topologie faible sur $\mathcal{E} = \cup_{k \geq 0} \pi_L^{-k} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ qui est la topologie de la limite inductive. Cette topologie induit la topologie (π_L, X) -adique sur $\mathcal{O}_L[[X]]$, et l'application naturelle $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \rightarrow k_L((X))$ est alors continue si l'on donne à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ la topologie faible et à $k_L((X))$ la topologie X -adique.

Si $\rho < 1$, alors on peut définir une norme $\|\cdot\|_{D(0,\rho)}$ sur $\mathcal{R}^+$ par la formule :

$$(1) \quad \|f(X)\|_{D(0,\rho)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{z \in \mathbf{C}_p \\ |z| \leq \rho}} |f(z)| = \sup_{i \geq 0} |a_i| \rho^i,$$

si $f(X) = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$. L'ensemble des normes $\{\|\cdot\|_{D(0,\rho)}\}_{0 \leq \rho < 1}$ définit une topologie sur $\mathcal{R}^+$ qui en fait un espace de Fréchet.

Définition 2.1.1. — Si $f(X) \in \mathcal{R}^+$ et $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, on dit que $f(X)$ est d'ordre r (il serait plus correct de dire « d'ordre $\leq r$ ») si pour un ρ tel que $0 < \rho < 1$, l'ensemble $\{p^{-nr} \|f(X)\|_{D(0,\rho^{1/p^n})}\}_{n \geq 0}$ est bornée.

Il est facile de voir que si c'est vrai pour un choix de $0 < \rho < 1$, alors c'est vrai pour tout choix de $0 < \rho < 1$. Un exemple de série d'ordre 1 est donné par $f(X) = \log(1 + X)$.

Nous allons maintenant rappeler les formules qui définissent l'action de Γ , le Frobenius φ et l'opérateur ψ sur ces anneaux. Soit R l'un des anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^+$, $\mathcal{R}^+$, $\mathcal{E}^\dagger$ ou $\mathcal{R}$.

Commençons par l'action de Γ ; le caractère cyclotomique $\varepsilon : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ est un isomorphisme. L'anneau R est alors muni d'une action de Γ , telle que si $\gamma \in \Gamma$, alors γ agit par un morphisme de L -algèbres, et $\gamma(X) \stackrel{\text{déf}}{=} (1 + X)^{\varepsilon(\gamma)} - 1$. On vérifie facilement que Γ agit par des isométries, pour toutes les normes et topologies définies ci-dessus. Les idéaux de $\mathcal{R}^+$ ou de $\mathcal{E}^+$ qui sont stables sous l'action de Γ sont d'une forme très particulière. Pour $n \geq 1$, on note :

$$Q_n(X) = \frac{(1 + X)^{p^n} - 1}{(1 + X)^{p^{n-1}} - 1}$$

ce qui fait par exemple que $Q_1(X) = ((1 + X)^p - 1)/X$ et que $Q_n(X) = \varphi^{n-1}(Q_1(X))$. Le polynôme $Q_n(X)$ est le polynôme minimal sur $\mathbf{Q}_p$ de $\zeta_{p^n} - 1$ et l'idéal de $L[X]$ qu'il engendre est donc stable sous l'action de Γ .

Lemme 2.1.2. — Si I est un idéal principal de $\mathcal{R}^+$, qui est stable par Γ , alors il existe une suite d'entiers $\{j_n\}_{n \geq 0}$ telle que I est engendré par un élément de la forme $X^{j_0} \prod_{n=1}^{+\infty} (Q_n(X)/p)^{j_n}$.

Si I est un idéal de $\mathcal{E}^+$, qui est stable par Γ , alors il existe une suite finie d'entiers $j_0, j_1, \dots, j_m$ telle que I est engendré par un élément de la forme $X^{j_0} \prod_{n=1}^m Q_n(X)^{j_n}$.

Pour $L = \mathbf{Q}_p$ ce lemme fait l'objet de [2, lemme I.3.2] et la démonstration s'adapte sans problème. Signalons tout de même que les polynômes $Q_n(X)$ ne sont plus nécessairement irréductibles dans $L[X]$, et que leurs diviseurs éventuels engendrent des idéaux de $L[X]$ stables par des sous-groupes ouverts de Γ .

L'anneau R est aussi muni d'un morphisme de Frobenius φ , qui est lui-aussi un morphisme de L -algèbres, tel que $\varphi(X) \stackrel{\text{déf}}{=} (1 + X)^p - 1$. Cette application est continue pour toutes les topologies ci-dessus et commute à l'action de Γ .