PÉRIODES p-ADIQUES

ASTÉRISQUE 223

Société Mathématique de France 2020

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France
Numéro 223

Comité de rédaction

Marie-Claude ARNAUD
Christophe BREUIL
Damien CALAQUE
Philippe EYSSIDIEUX
Christophe GARBAN
Colin GUILLARMOU
Fanny KASSEL
Éric MOULINES
Alexandru OANCEA
Nicolas RESSAYRE
Sylvia SERFATY
Nicolas BURQ (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
christian.munusami@smf.math.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarif

Vente au numéro : 65 € /$ 97
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2020*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN 978-2-85629-924-1
DOI 10.24033/ast.1122

Directeur de la publication Fabien DURAND

ASTÉRISQUE 223

PÉRIODES p-ADIQUES

Société Mathématique de France 2020

Séminaire de Bures, 1988

***Classification mathématique par sujets* (2010). —** 11G10, 11G25, 11S20, 14F20, 14F30, 14F40.

***Mots clefs*. —** Anneau des périodes p-adiques, représentation galoisienne, représentation cristalline, représentation semi-stable, représentation de de Rham, (φ, N)-module filtré, cohomologie étale ℓ-adique, cohomologie étale p-adique, cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline, cohomologie log-cristalline, théorème de comparaison, schéma abélien, 1-motif.

***Key words and phrases*. —** p-adic period ring, Galois representation, crystalline representation, semi-stable representation, de Rham representation, filtered (φ, N)-module, ℓ-adic étale cohomology, p-adic étale cohomology, de Rham cohomology, crystalline cohomology, log-crystalline cohomology, comparison theorem, abelian scheme, 1-motive.

***DOI*. —** 10.24033/ast.1122.

Jean-Marc Fontaine (1944–2019)

Préface à la deuxième édition

Ce volume est la réédition de l'ouvrage Astérisque 223 : *Périodes p-adiques*, publié en 1994 et contenant la rédaction des exposés du séminaire sur la théorie de Hodge p-adique et les périodes p-adiques organisé à l'IHÉS par Jean-Marc Fontaine entre février et mai 1988.

Le texte original est inchangé, mais complété par une liste d'errata et d'addenda (résumant brièvement certains des nombreux développements du sujet depuis) , ainsi que par une bibliographie additionnelle. Cette liste et cette bibliographie sont issues du travail de relecture et des nombreuses remarques d'Olivier Brinon, Pierre Colmez, Kazuya Kato, Luc Illusie, Bernadette Perrin-Riou et Tamás Szamuely (et de Christophe Breuil, éditeur). Qu'ils soient tous chaleureusement remerciés ici.

Merci aussi à Ahmed Abbes, Luc Illusie, Yukiyoshi Nakkajima, Atsushi Shiho et Takeshi Tsuji pour leur aide précieuse.

Depuis la première édition de 1994, plusieurs contributeurs de ce volume ne sont plus avec nous. Michel Raynaud nous a quittés en mars 2018, puis Jean-Pierre Wintenberger et Jean-Marc Fontaine en janvier 2019.

Cette réédition était un projet particulièrement cher à Jean-Marc Fontaine. L'édition originale était dédiée à la mémoire d'Osamu Hyodo. Que cette réédition le soit en plus à celles de Jean-Marc, de Michel et de Jean-Pierre, comme un humble hommage à leurs travaux.

1. Chaque numéro dans la marge renvoie à un erratum ou un addendum dans la liste.

PÉRIODES p-ADIQUES

***Résumé.* —** Soit K un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$ et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Ce volume est centré sur l'étude des représentations p-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, des différentes cohomologies p-adiques associées aux variétés propres et lisses sur K et des comparaisons entre elles. Il contient notamment :

— la construction du corps B_{dR} des périodes p-adiques et de certains de ses sous-anneaux $(B^+_{\mathrm{dR}}, B_{\mathrm{cris}}, B_{\mathrm{st}}, \dots)$;

— la définition des représentations p-adiques semi-stables et leur classification au moyen de (φ, N)-modules filtrés ;

— la définition et l'étude de la cohomologie cristalline à pôles logarithmiques pour les log-schémas log-lisses sur k ;

— la comparaison entre la cohomologie cristalline à pôles logarithmiques et la cohomologie de de Rham pour une variété propre et lisse X sur K ayant réduction semi-stable, ce qui permet d'associer à X un (φ, N)-module filtré ;

— pour X comme ci-dessus, un théorème de comparaison p-adique permettant de fabriquer la cohomologie étale p-adique de $X \otimes \overline{K}$ à partir de ce (φ, N)-module filtré, lorsque la dimension de X est $\leq \frac{1}{2}(p-1)$;

— une version relative du théorème de comparaison p-adique sur un schéma abélien, moyennant des hypothèses assez générales ;

— l'étude de la monodromie et les réalisations ℓ-adiques des 1-motifs sur K.

La présente réédition de l'Astérisque 223 de 1994 comprend une liste d'errata et d'addenda, ainsi qu'une bibliographie additionnelle.

***Abstract* (p-adic periods). —** Let K be a field of characteristic 0 which is complete with respect to a discrete valuation with perfect residue field k of characteristic $p > 0$, and $\overline{K}$ an algebraic closure of K. This volume is focused on the study of p-adic representations of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, of different p-adic cohomologies associated to smooth proper varieties over K and of comparisons between them. It notably contains:

— the construction of the field B_{dR} of p-adic periods and of some of its subrings (B_{dR}^+, B_{cris}, B_{st},...);

— the definition of semi-stable p-adic representations and their classification in terms of filtered (φ, N)-modules;

— the definition and study of crystalline cohomology with logarithmic poles for log-smooth log-schemes over k;

— the comparison between crystalline cohomology with logarithmic poles and de Rham cohomology for a smooth proper variety X over K with semi-stable reduction, which allows to associate a filtered (φ, N)-module to X;

— for X as above, a p-adic comparison theorem which allows to recover the p-adic étale cohomology of $X \otimes \overline{K}$ from this filtered (φ, N)-module when the dimension of X is $< (p-1)/2$;

— a relative version of the p-adic comparison theorem for an abelian scheme under quite general assumptions;

— the study of the monodromy and of the ℓ-adic realizations of 1-motives over K.

The present reedition of Astérique 223 of 1994 includes a list of errata and addenda, and an additional bibliography.