ASTÉRISQUE 257

COHOMOLOGIE, STABILISATION ET CHANGEMENT DE BASE

Jean-Pierre Labesse

Avec deux appendices :

Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires

Laurent Clozel et Jean-Pierre Labesse

Ensembles croisés et algèbre simpliciale

Lawrence Breen

Société Mathématique de France 1999

Jean-Pierre Labesse
Institut de Mathématiques, UMR 7586, Théorie des Groupes,
Université Paris 7, Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05.
E-mail : `labesse@math.jussieu.fr`
Laurent Clozel
Université Paris-sud, Département de Mathématiques, Bâtiment 425,
91405 Orsay Cedex.
E-mail : `clozel@math.u-psud.fr`
Lawrence Breen
Université Paris XIII, Institut Galilée, Avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse.
E-mail : `breen@math.univ-paris13.fr`

***Classification mathématique par sujets* (1991). —** 11F70, 11F72, 11E72, 11F75, 11R34, 11R39 18G30, 22E55.

***Mots clefs.* —** Représentations automorphes, formule des traces, changement de base, conjugaison stable, cohomologie non-abélienne, ensembles croisés.

COHOMOLOGIE, STABILISATION ET CHANGEMENT DE BASE

Jean-Pierre Labesse

suivi d'un appendice par
Laurent Clozel et Jean-Pierre Labesse

et d'un appendice par **Lawrence Breen**

Résumé. — Dans le texte principal de ce volume nous introduisons la notion d'ensemble croisé (qui généralise celle de module croisé) et nous étudions la cohomologie galoisienne de ces objets. Ces considérations cohomologiques sont la clef de la stabilisation de tous les termes elliptiques de la formule des traces tordue. Puis nous prouvons l'existence du transfert endoscopique stable dans le cas du changement de base cyclique. Nous déduisons d'une stabilisation conditionnelle de la formule des traces tordue l'existence du changement de base faible (descente et relèvement) dans certains cas, en particulier pour les représentations automorphes, sur les groupes semi-simples simplement connexes, qui sont de Steinberg en deux places finies. Un appendice co-signé avec L. Clozel, est consacré au cas de certains groupes unitaires. Dans un second appendice L. Breen replace la cohomologie des ensembles croisés dans le cadre de l'algèbre simpliciale.

***Abstract* (Cohomology Stabilization and Base Change).** — In the main article of this volume we introduce the concept of a "crossed set" (a generalization of crossed modules) and we study the Galois cohomology of these objects. This is the key to the stabilization of all elliptic terms for the twisted trace formula. We then prove the existence of the stable transfer for cyclic base change. We deduce from a conditional stabilization of the twisted trace formula the existence of weak base change in some cases, in particular for automorphic representations on simply connected semi-simple groups which are Steinberg at two places. In an appendix by L. Clozel and myself, we study the case of certain unitary groups. In a second appendix L. Breen rephrases crossed sets in the framework of simplicial algebra.

© Astérisque 257, SMF 1999

TABLE DES MATIÈRES

Cohomologie, stabilisation et changement de base,
par J.-P. Labesse 1

Introduction 3

1. Préliminaires cohomologiques 9
1.1. Ensembles croisés et modules croisés 9
1.2. Cohomologie à valeurs dans un ensemble croisé 15
1.3. Cohomologie galoisienne 21
1.4. Cohomologie adélique 24
1.5. Un lemme sur les tores anisotropes 27
1.6. Cohomologie abélianisée d'un groupe réductif 28
1.7. Retour sur quelques résultats de Kottwitz 37
1.8. Abélianisation de complexes de groupes réductifs 40
1.9. Sous-groupes elliptiques 44

2. Conjugaison stable, intégrales orbitales et norme 49
2.1. Groupes et automorphismes 49
2.2. Restriction des scalaires et algèbres cycliques 50
2.3. La conjugaison stable 52
2.4. Norme pour le changement de base 54
2.5. Image de la norme, cas local 58
2.6. Image de la norme, cas global 62
2.7. Intégrales orbitales et intégrales κ-orbitales 67

3. Transfert local 71
3.1. Conjugaison au voisinage d'éléments semi-simples 71
3.2. Définition du transfert 76
3.3. Transfert aux places non-archimédiennes 78
3.4. Transfert aux places décomposées 81

3.5. Transfert K-fini aux places archimédiennes 82
3.6. Transfert et représentations des séries principales 87
3.7. Transfert non-ramifié : le lemme fondamental 90
3.8. Fonctions cuspidales et stabilisantes 92
3.9. Transfert et représentation de Steinberg 92

4. Stabilisation de la formule des traces et applications 97
4.1. Partie elliptique de la formule des traces 97
4.2. Pré-stabilisation géométrique 98
4.3. Stabilisation conditionnelle pour le changement de base 101
4.4. Décomposition spectrale et forme simple de la formule des traces 104
4.5. Identité spectrale pour le changement de base 107
4.6. Changement de base automorphe 109
4.7. Existence de cohomologie cuspidale 112

Bibliographie 113

Appendices 117

A. Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires, par L. Clozel et J.-P. Labesse 119
Présentation 119
A.1. Fonctions de Lefschetz et d'Euler-Poincaré archimédiennes 119
A.2. Sur certains groupes unitaires 124
A.3. Comparaison des formules de traces 126
A.4. Un théorème de Kottwitz 128
A.5. Le théorème principal 130

Bibliographie 133

B. Ensembles croisés et algèbre simpliciale, par L. Breen 135
Introduction 135
B.1. Ensembles croisés et ensembles simpliciaux 137
B.2. Ensembles croisés et 2-catégories 142
B.3. Cohomologie galoisienne des ensembles croisés 146
B.4. Complexes de longueur n et n-catégories 151

Bibliographie 159

COHOMOLOGIE, STABILISATION ET CHANGEMENT DE BASE

J.-P. Labesse

INTRODUCTION

Motivations

Soit G_0 un groupe réductif connexe sur un corps de nombres F. Soit H la forme intérieure de G_0 quasi-déployée. Soit E une algèbre cyclique de degré ℓ sur F. Soit G la restriction des scalaires à la Weil de E à F de G_0 :

$$G = \mathrm{Res}_{E/F} G_0 \ .$$

Le résultat principal est un théorème de changement de base faible entre représentations automorphes pour H et G. Nous traiterons le cas d'un groupe réductif quelconque avec toutefois des limitations techniques : nous serons contraints d'imposer des hypothèses de cuspidalité et de stabilité qui simplifient suffisamment la comparaison des formules de traces. Nous pouvons par exemple prouver l'existence de fonctorialité par changement de base cyclique entre représentations automorphes cuspidales qui sont de Steinberg en deux places finies pour les groupes semi-simples et simplement connexes arbitraires.

Les restrictions que nous imposons sont, pour l'essentiel, le reflet de notre mauvaise connaissance du transfert endoscopique en général : nous ne disposons du lemme fondamental que pour le « changement de base stable ». La stabilisation complète de la formule des traces pose aussi des problèmes non résolus. Mais, même dans le cadre simplifié où nous nous plaçons, de longs préparatifs techniques sont nécessaires. Je vais tenter d'expliquer pourquoi.

Considérations techniques

Nous utilisons une méthode désormais classique : la comparaison de deux formules des traces. Il y a sur ce sujet une littérature abondante lorsque G_0 est une forme intérieure ou extérieure de $GL(n)$; on citera, sans prétendre être exhaustif : [JL], [Lan1], [DKV], [AC], [Rog], [Lab3], [Clo3], [Clo4].

Pour un groupe réductif connexe arbitraire, on dispose déjà de nombreux résultats techniques. Le transfert des fonctions de G à H sur les corps locaux au voisinage d'éléments réguliers est facile et classique. Par ailleurs, on dispose aussi depuis longtemps du lemme fondamental 'stable' pour l'élément neutre de l'algèbre de Hecke aux places non ramifiées dû à Kottwitz [Ko3]. On dispose enfin de la stabilisation de la formule des traces tordue pour les éléments elliptiques réguliers, due à Kottwitz et Shelstad ([KS]). Ceci fournit, pour certaines paires de fonctions (ϕ, f) qui se correspondent par le transfert, et pour lesquelles les groupes endoscopiques autres que H donnent une contribution nulle, une identité de formule des traces

$$I^G(\phi) = c\, I^H(f) \ .$$

L'annulation des contributions des autres groupes endoscopiques peut être obtenue en faisant appel à une technique également due à Kottwitz [Ko6] : on utilise comme fonctions en certaines places finies des pseudo-coefficients de représentations de Steinberg. Ces techniques ont, par exemple, été utilisées dans [Clo2] et [Lab1] pour la preuve (incomplète, cf. infra) du lemme fondamental pour le changement de base.

Mais nous allons voir que, pour le théorème de changement de base que nous voulons établir, les techniques évoquées ci-dessus semblent insuffisantes, principalement parce qu'elles ne donnent pas assez d'informations sur le lieu singulier. Il a été observé dans [Lab3] que, pour des groupes autres que $GL(n)$, une identité de formule des traces limitée aux paires de fonctions à support régulier en certaines places, semble insuffisante pour établir le changement de base : il manque des informations supplémentaires du type rigidité ou finitude à priori (cf. [Lab3, VI.6.2]), dont on dispose pour $GL(n)$, mais qui sont pour l'instant hors de portée pour les autre groupes. Ces informations supplémentaires sont utiles pour les raisons suivantes.
(a) Pour prouver l'existence de relèvements, il faut par exemple établir, qu'après « séparation des caractères infinitésimaux », le terme spectral de la formule des traces pour H ne s'annule pas identiquement sur la famille de fonctions f considérées. Sans résultat de finitude a priori, des arguments de positivité, faisant usage de fonctions de type positif, semblent indispensables.
(b) De même, pour la descente automorphe on doit prouver la non annulation de la formule des traces tordue pour G, après séparation des caractères infinitésimaux. Ici l'argument est l'indépendance linéaire des familles finies de caractères. Sans résultat de finitude a priori, là encore il n'est pas clair que l'on puisse se contenter des fonctions à support régulier.

Pour parer l'objection (a) nous travaillerons avec des fonctions de type positif approchant la mesure de Dirac, ce qui, du côté spectral, donne des termes tous positifs et assure la non nullité. Il conviendra donc de prouver le transfert inverse au moins pour des fonctions à support petit au voisinage de l'origine. La difficulté (b) est