

356

ASTÉRISQUE

2013

MICROLOCAL PROPERTIES
OF SHEAVES AND COMPLEX WKB

Alexander Getmanenko & Dmitry Tamarkin

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 356, 2013

Comité de rédaction

Ahmed ABBES	Damien GABORIAU
Viviane BALADI	Michael HARRIS
Gérard BESSON	Fabrice PLANCHON
Laurent BERGER	Pierre SCHAPIRA
Philippe BIANE	Bertrand TOEN
Hélène ESNAULT	

Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 35 € (\$ 52)

Abonnement Europe : 484 €, hors Europe : 523 € (\$ 784)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2013

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-772-8

Directeur de la publication : Marc Peigné

356

ASTÉRISQUE

2013

MICROLOCAL PROPERTIES
OF SHEAVES AND COMPLEX WKB

Alexander Getmanenko & Dmitry Tamarkin

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Alexander GETMANENKO

Kavli IPMU

University of Tokyo

5-1-5 Kashiwanoha, Kashiwa-shi, Chiba-ken 277-8583

Japan

`alexander.getmanenko@ipmu.jp`

Dmitry TAMARKIN

Mathematics Department

Northwestern University

2033 Sheridan Road, Evanston, IL 60208

USA

`tamarkin@math.northwestern.edu`

MICROLOCAL PROPERTIES OF SHEAVES AND COMPLEX WKB

Alexander GETMANENKO & Dmitry TAMARKIN

Abstract. — Kashiwara-Schapira style sheaf theory is used to justify analytic continuability of solutions of the Laplace transformed Schrödinger equation with a small parameter. This partially proves the description of the Stokes phenomenon for WKB asymptotics predicted by Voros in 1983.

Résumé (Propriétés microlocales des faisceaux et méthode BKW complexe). — La théorie microlocale des faisceaux de Kashiwara-Schapira est utilisée pour obtenir le prolongement analytique des solutions de la transformée de Laplace de l'équation de Schrödinger dépendant d'un petit paramètre. Ceci démontre partiellement le phénomène de Stokes pour les développements asymptotiques BKW, prédit par Voros en 1983.

CONTENTS

1. Introduction	1
1.1. Cauchy problem	1
1.1.1. Initial data	1
1.2. Multi-valued solution to a multi-valued Cauchy problem	2
1.3. Formulation of the result	2
1.4. Introducing sheaves	3
1.4.1. A covering space X	3
1.4.2. Solution sheaf and its singular support	3
1.4.3. Initial value problem in sheaf-theoretical terms	4
1.4.4. Semi-orthogonal decomposition of $Rg_! \mathbb{Z}_{S_\alpha}[-2]$	4
1.4.5. Étale space of Φ_0 and solving the initial data problem	5
2. Conventions and Notations	7
2.1. Various subsets of \mathbb{C}	7
2.2. Sector S_α	7
2.3. Potential $V(x)$. Stokes curves. Assumptions	7
2.3.1. Stokes curves and further assumptions	7
2.3.2. Further assumptions	8
2.4. Universal cover X	8
2.5. Initial point x_0	8
2.6. Action function on X	8
2.7. Subdivision of X into α -strips	8
2.7.1. Weakest Possible Assumptions on $V(x)$	9
2.7.2. Boundary rays	9
2.7.3. Strips form a tree	9
2.8. $(-\alpha)$ -Strips	9
2.9. Interaction of α and $-\alpha$ -strips	10
2.10. Categories	10
2.10.1. Sub-categories $\mathcal{C}^Y; {}^\perp \mathcal{C}^Y$	10
2.11. Sheaves	11
3. Statement of the problem and Main results	13
3.1. Transfer of the equation $-\Psi_{xx} + V(x)\Psi_{ss} = 0$ to $X \times \mathbb{C}$	13
3.2. Singular support of the solution sheaf Sol	13

3.3. Initial conditions	15
3.3.1. Definition of a solution	16
3.3.2. Equivalent formulation	16
3.3.3. Formulation of the analytic continuation problem	17
3.4. Semi-orthogonal decomposition of $Rg_! \mathbb{Z}_{S_\alpha}[-2]$	17
3.4.1. Factorization of the initial condition	17
3.4.2. Truncation	18
3.5. Étale space of Φ_0	19
3.5.1. Choice of a covering space Σ	19
3.5.2. Solving the initial value problem	19
3.5.3. Solving the analytic continuation problem	19
3.6. Structure of the object Φ	19
3.6.1. Decomposition of $\pi_{S_\alpha}! \mathbb{Z}_{S_\alpha} \in \mathbf{D}(\mathbb{C})$	20
3.6.2. Semi-orthogonal decomposition for $\mathbb{Z}_{\mathbf{x}_0 \times \mathbb{C}}, \mathbb{Z}_{\mathbf{x}_0 \times K}, \mathbb{Z}_{\mathbf{x}_0 \times \mathbb{r}_{\pm\alpha}}$	21
3.6.3. $\Phi^{\mathbb{C}}$	22
3.7. Notation: convolution functor $\mathbf{D}(X \times \mathbb{C}) \times \mathbf{D}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{D}(X \times \mathbb{C})$	22
3.8. Construction of Φ^K	22
3.8.1. Subdivision into α -strips	22
3.8.2. Words	23
3.8.3. Sheaves S_ℓ, S_w on \mathbb{C}	23
3.8.4. Definition of Φ_P^K	24
3.8.5. Construction of the identification $\Gamma_{\Phi^K}^{P_1 P_2}$	24
3.8.6. Description of the map $i_{\Phi^K} : \mathbb{Z}_{\mathbf{x}_0 \times K}[-2] \rightarrow \Phi^K$	26
3.9. Alternative construction of Φ^K via $-\alpha$ -strips	27
3.9.1. Notation for $-\alpha$ -strips	27
3.9.2. Sheaves Ψ_{Π}^K	28
3.9.3. Gluing maps	28
3.10. The map $I_{\Psi\Phi}$	29
3.10.1. Decomposing $i_{\Pi P}$ into components	30
3.10.2. Identification $\mathbf{W}^{-\alpha} \rightarrow \mathbf{W}^\alpha$	30
3.10.3. Formulation of the result	31
3.11. Description of $\Phi^{\mathbf{r}\alpha}$	31
3.12. Description of $\Phi^{\mathbf{r}-\alpha}$	31
3.13. Constructing the map (30)	32
3.13.1. The map $q_{\mathbf{C}\mathbf{r}\alpha}$	32
3.13.2. Map $q_{K\mathbf{r}-\alpha} : \Psi^K \rightarrow \Phi^{\mathbf{r}-\alpha}$	33
3.13.3. Map $q_{K\mathbf{r}\alpha} : \Psi^K \rightarrow \Phi^{\mathbf{r}\alpha}$	33
3.13.4. Restriction of Q to a parallelogram	33
3.13.5. The map $q_{\mathbf{C}\mathbf{r}\alpha}$ revisited.	34
3.13.6. The map $q_{K\mathbf{r}-\alpha}$	34
3.13.7. The map $q_{K\mathbf{r}\alpha}$	34
3.14. Σ and \mathcal{J} are Hausdorff	34

3.14.1. Generalities on étalé spaces	35
3.14.2. Reduction to rigidity on $\Pi \cap P$	35
3.14.3. Filtration on $\Phi_0 _{\Pi \cap P \times \mathbb{C}}$	36
3.14.4. Sheaf $F'_n \supset F_n$	36
3.14.5. Further filtrations on $\mathcal{G}^n, \mathcal{L}_n, F'_n$	36
3.14.6. Finishing the proof	36
3.15. Surjectivity of the projection $p_\delta: \phi \rightarrow X$.	37
3.15.1. Constructing \mathcal{U}	37
3.15.2. Verifying 1)	38
3.15.3. Verifying 2)	38
3.15.4. Reformulation of 3)	38
3.15.5. Subset $W \subset S_\alpha$	39
3.15.6. Finishing the proof	40
3.16. Infinite continuation in the direction of K	41
3.16.1. Parallelogram \mathbf{U}	41
3.16.2. Small sets	41
3.16.3. Theorem	42
3.16.4. Reformulation in terms of sheaves	42
3.16.5. Writing f_σ in terms of its components	43
3.16.6. Restriction to a sub-parallelogram \mathbf{V}	44
3.16.7. Proof of a weaker version of the Theorem	44
3.16.8. Proof of the theorem for \mathbf{U}	46
4. Orthogonality criterion – a simplified version	47
4.1. Formulation of the Theorem	47
4.2. Fourier-Sato Kernel	48
4.2.1. Properties of the modified Fourier-Sato transform	48
4.2.2. Singular support estimation	49
4.2.3.	51
4.2.4. Representation of G	51
5. Orthogonality criterion for a generalized strip	53
5.1. Conventions and notations	53
5.1.1. Convolution	53
5.1.2. The category \mathcal{C}_S .	54
5.1.3. Rays l_+ and l_-	54
5.1.4. Projectors P_\pm	54
5.2. Formulation of the criterion	54
5.3. Fourier-Sato decomposition	54
5.4. Transfer of the conditions $RP_{\pm!}F = 0$ to $\mathbb{F}F$	55
5.5. Fourier-Sato decomposition for sheaves satisfying (103)	56
5.5.1. Computing $\mathbb{Z}_Z * \mathbb{Z}_{l_+}$	57
5.5.2. Further reformulation	59

5.5.3. Rewriting the map (123)	59
5.5.4. Transferring Claim 4 to Φ_F	60
5.6. Rewriting the condition of orthogonality to \mathcal{C}	61
5.7. Subdivision into three cases	62
5.7.1. Subdivision of $\mathbb{R} \times \mathbf{S} \times R$	63
5.7.2. Subdivision of Φ_F	63
5.7.3. Subdivision of \mathcal{H}	63
5.7.4. Subdivision of Claim 5	64
5.7.5. Further reduction	64
5.7.6.	65
5.8. The case $\mathbf{U}_\diamond = I_\diamond \times (-\infty, \infty) \times R$	65
5.9. Proof of Claim 9 for $\mathbf{U}_\diamond = I_\diamond \times (0, \infty) \times \mathbb{R}$	66
5.9.1. Representation of G	66
5.10. Proof of Claim 10	67
5.10.1. Functors r_1 and r_2 and their properties	67
5.10.2. Construction of the object H and proof of the Claim 10 1)	68
5.10.3. Reduction of part 2) of the Claim 10	69
5.10.4. Subdivision into three cases	69
5.10.5. Proof of the 1-st and the 2-nd vanishing	69
5.11. Finishing proof of Claim 9	72
6. Proof of Theorem 3.4	75
6.1. Proof of $\Phi^K \in \mathcal{C}$	75
6.2. Proof of orthogonality	76
6.2.1. Regular sequences	76
6.2.2. Admissible rays	76
6.2.3. Subset $P_{\lambda,w}$	77
6.2.4. Subsheaves $\Lambda_{P,\lambda,w}^{K\pm}$	77
6.2.5. Subsheaves $\Phi_P^{K,\lambda} \subset \Phi_P^K$	77
6.2.6. Sheaves $\Phi_P^{K,\lambda}$ match on the intersections	77
6.2.7. Definition of a filtration on Φ^K	78
6.2.8. Computing $F^1\Phi^K$	79
6.2.9. The map i_Ψ factorizes through $F^1\Phi^K$	79
6.2.10. Computing successive quotients of the filtration	80
6.2.11. Description of \mathcal{G}_n	83
6.2.12. Reduction of the orthogonality property	85
6.2.13. Conventions	85
6.2.14. Orthogonality of A_w	85
6.2.15. Orthogonality of B_w	87
6.2.16. Orthogonality of $\text{Cone}(\mathbb{Z}_{\{x_0\} \times K}[-2] \rightarrow F^1\Phi^K)$	89
7. Identification of Φ^K and Ψ^K	91
7.1. Endomorphisms of $\Lambda^{K+} * S_+ \oplus \Lambda^{K-} * S_- _{(P \cap \Pi) \times \mathbb{C}}$	91