

**367-368**

**ASTÉRISQUE**

**2015**

SÉMINAIRE BOURBAKI  
VOLUME 2013/2014  
EXPOSÉS 1074-1088

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

---

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 367-368

---

*Comité de rédaction*

Ahmed ABBES	Damien GABORIAU
Viviane BALADI	Michael HARRIS
Laurent BERGER	Fabrice PLANCHON
Gérard BESSON	Pierre SCHAPIRA
Philippe BIANE	Bertrand TOËN
Hélène ESNAULT	

Éric VASSEROT (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 90 € (\$ 135)

*Abonnement* Europe : 650 €, hors Europe : 689 € (\$ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2015

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-804-6

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

---

**367-368**

**ASTÉRISQUE**

**2015**

SÉMINAIRE BOURBAKI  
VOLUME 2013/2014  
EXPOSÉS 1074-1088

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki.

École normale supérieure,

45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.

URL : <http://www.bourbaki.ens.fr>

---

*Mots-clés et classification mathématique par sujets (2000)*

**Exposé n° 1074.** — Problèmes bien posés, séries aléatoires, équations des ondes — 35A05, 35L71, 37L50.

**Exposé n° 1075.** — Lemme de Margulis, courbure de Ricci presque positive — 53C20.

**Exposé n° 1076.** — Processus de saut, équation de Boltzmann, programme de Kac, différentiabilité en dimension infinie, simulation directe Monte Carlo — 35B35, 35Q20, 45K05, 60J75, 65C05, 82C22, 82C40, 82C80.

**Exposé n° 1077.** — Approximate groups — 11B30; 03C98, 20N99.

**Exposé n° 1078.** — Variétés de dimension 3, géométrie hyperbolique, complexes cubiques — 20F67 57Mxx.

**Exposé n° 1079.** — Homologie de Khovanov, homologie de Floer lagrangienne, homologie de Heegaard-Floer — 57M25, 57M27, 57R17.

**Exposé n° 1080.** — Géométrie conforme, surface minimale, conjecture de Willmore, méthode de min-max — 53C42, 49Q20.

**Exposé n° 1081.** — Surfaces K3, conjecture de Tate, courbes rationnelles, théorème de Torelli — 14J28, 14C25, 14C20, 14C34, 14G35.

**Exposé n° 1082.** — Spin glasses, ultrametricity, Parisi formula, Ghirlanda-Guerra identity — 82B44, 82B20, 60K35.

**Exposé n° 1083.** — Équation de Boltzmann, hiérarchie BBGKY, limite de Boltzmann-Grad, théorie cinétique, propagation du chaos, équation de Boltzmann linéaire, approximation par la diffusion — 35Q20, 82A70, 35Q70, 82B40, 82C22.

**Exposé n° 1084.** — Prime numbers, primes in arithmetic progressions, prime gaps, sieve methods, exponential sums, bilinear forms — 11N05, 11N13, 11N35, 11N37, 11L05, 11T23.

**Exposé n° 1085.** — Théorie des types, axiome d'univalence,  $\infty$ -groupoïdes — 03B15, 18A15.

**Exposé n° 1086.** — Preuve formelle — 03B15, 03B35, 68T15.

**Exposé n° 1087.** — Einstein equations, general relativity, quasilinear wave equations, low regularity, Cauchy problem — 83C05, 53C50, 53C80, 35L72.

**Exposé n° 1088.** — États purs sur les  $C^*$ -algèbres, polynômes réels stables, matrices aléatoires, polynômes caractéristiques mixtes, conjecture de Bourgain-Tzafriri, graphes de Ramanujan — 05C50, 15A15, 26C10, 46L30.

---

**SÉMINAIRE BOURBAKI**  
**VOLUME 2013/2014**  
**EXPOSÉS 1074-1088**

**Résumé.** — Ce 66<sup>e</sup> volume du Séminaire Bourbaki regroupe les textes des quinze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité effectués pendant l'année 2013/2014 : quatre exposés de topologie et géométrie différentielle, quatre exposés d'équations aux dérivées partielles, un exposé sur la structure des groupes approximatifs, un exposé d'analyse fonctionnelle, un exposé sur la géométrie algébrique des surfaces K3, un exposé sur les écarts entre nombres premiers, un exposé de probabilités et deux exposés sur les fondements des mathématiques et les preuves formelles.

**Abstract (Séminaire Bourbaki, volume 2013/2014, exposés 1074–1088)**

This 66th volume of the Bourbaki Seminar contains the texts of the fifteen survey lectures done during the year 2013/2014: four lectures on topology and differential geometry, four lectures about partial differential equations, one lecture on the structure of approximate groups, one lecture about functional analysis, one lecture on the algebraic geometry of K3 surfaces, one lecture about the gaps between prime numbers, one lecture on probability theory and two lectures concerning foundations of mathematics and formal proofs.



Résumés des exposés .....	vii
---------------------------	-----

## NOVEMBRE 2013

1074	Anne de BOUARD — <i>Construction de solutions pour des EDP sur-critiques à données initiales aléatoires (d'après N. Burq et N. Tzvetkov)</i> .....	1
1075	Gilles COURTOIS — <i>Lemme de Margulis à courbure de Ricci minorée (d'après Vitali Kapovitch et Burkhard Wilking)</i> .....	25
1076	Laurent DESVILLETES — <i>Progrès récents concernant le programme de Kac en théorie cinétique (d'après Stéphane Mischler et Clément Mouhot)</i> .....	57
1077	Lou van den DRIES — <i>Approximate Groups (according to Hrushovski and Breuillard, Green, Tao)</i> .....	79

## JANVIER 2014

1078	Nicolas BERGERON — <i>Toute variété de dimension 3 compacte et sphérique est virtuellement de Haken (d'après Ian Agol et Daniel T. Wise)</i> .....	115
1079	Vincent COLIN — <i>Réalisations géométriques de l'homologie de Khovanov par des homologies de Floer (d'après Abouzaid-Seidel-Smith et Ozsváth-Szabó)</i> .....	151
1080	Tristan RIVIÈRE — <i>Méthodes de min-max et la conjecture de Willmore (d'après F.C. Marques et A.A. Neves)</i> .....	179

## MARS 2014

1081	Olivier BENOIST — <i>Construction de courbes sur les surfaces <math>K3</math> (d'après Bogomolov-Hassett-Tschinkel, Charles, Li-Liedtke, Madapusi Pera, Maulik...)</i> .....	219
1082	Erwin BOLTHAUSEN — <i>Ultrametricity in mean-field spin glasses (after Dmitry Panchenko)</i> .....	255
1083	François GOLSE — <i>De Newton à Boltzmann et Einstein : Validation des modèles cinétiques et de diffusion (d'après T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond, B. Texier)</i> .....	285

1084	Emmanuel KOWALSKI — <i>Gaps between prime numbers and primes in arithmetic progressions (after Y. Zhang and J. Maynard) . . . .</i>	327
------	---	-----

*JUIN 2014*

1085	Thierry COQUAND — <i>Théorie des types dépendants et axiome d'univalence . . . . .</i>	367
1086	Thomas C. HALES — <i>Developments in formal proofs . . . . .</i>	387
1087	Jacques SMULEVICI — <i>The bounded <math>L^2</math> curvature conjecture (after S. Klainerman, I. Rodnianski and J. Szeftel) . . . . .</i>	411
1088	Alain VALETTE — <i>Le problème de Kadison-Singer (d'après A. Marcus, D. Spielman et N. Srivastava) . . . . .</i>	451



Anne de BOUARD — *Construction de solutions pour des EDP sur-critiques à données initiales aléatoires (d'après N. Burq et N. Tzvetkov)*

Certaines équations aux dérivées partielles admettent un exposant de régularité critique en dessous duquel le problème de Cauchy est réputé mal posé, grâce à un argument d'échelle introduit pour la première fois par Ginibre et Velo. Dans certains cas cette conjecture a été démontrée (notamment par Lebeau d'une part et Christ-Colliander-Tao d'autre part, pour l'équation des ondes non linéaire ou l'équation de Schrödinger non linéaire). Nous expliquerons comment N. Burq et N. Tzvetkov construisent néanmoins des solutions locales (ou globales dans certains cas) pour de telles équations, pour presque toutes données initiales choisies aléatoirement dans une classe de régularité inférieure à ce seuil de régularité critique.

Gilles COURTOIS — *Lemme de Margulis à courbure de Ricci minorée (d'après Vitali Kapovitch et Burkhard Wilking)*

Le lemme de Margulis affirme qu'il existe une constante strictement positive  $\mu(n)$  telle que pour toute variété riemannienne  $(M, g)$  de dimension  $n$  et de courbure sectionnelle comprise entre  $-1$  et  $0$ , et tout point  $x$  de  $M$ , le sous-groupe du groupe fondamental de  $M$  en  $x$  engendré par les lacets de longueur inférieure à  $\mu(n)$  contient un sous-groupe nilpotent d'indice fini, majoré par une constante  $C(n)$ . La démonstration de ce lemme résulte, dans le cas homogène, d'une observation très simple sur les commutateurs de matrices et s'y ramène, dans le cas riemannien, en considérant l'holonomie le long des lacets. Le but de cet exposé est d'expliquer la démonstration, par V. Kapovitch et B. Wilking, du lemme de Margulis lorsque  $(M, g)$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{M}(n)$  des variétés riemanniennes de dimension  $n$  à courbure de Ricci minorée par  $-1$ . Sous cette seule hypothèse de borne inférieure sur la courbure de Ricci, la preuve est de nature profondément différente : elle repose sur des travaux de J. Cheeger et T. Colding concernant la structure des espaces métriques au bord de  $\mathcal{M}(n)$ .

Laurent DESVILLETES — *Progrès récents concernant le programme de Kac en théorie cinétique (d'après Stéphane Mischler et Clément Mouhot)*

Le programme de Kac s'inscrit dans le cadre général du 6<sup>e</sup> problème de Hilbert, qui vise à axiomatiser une partie de la physique mathématique, et en particulier la théorie cinétique des gaz. Il explique en quoi certaines équations non-linéaires de la physique macroscopique peuvent être vues comme des limites de systèmes avec un nombre fini de particules. Récemment, S. Mischler et C. Mouhot ont proposé de nouvelles estimations pour ce programme qui sont à la fois plus explicites que celles qui étaient précédemment connues et mieux compatibles avec les limites en temps grand.

Lou van den DRIES — *Approximate Groups (according to Hrushovski and Breuillard, Green, Tao)*

On appelle groupe  $K$ -approximatif toute partie  $X$  d'un groupe qui est symétrique, contient l'identité et est tel que  $XX$  peut être recouvert par au plus  $K$  translatés à gauche de  $X$ . Le résultat principal dit que tout groupe  $K$ -approximatif fini est, grossièrement, fini-par-nilpotent.

Nicolas BERGERON — *Toute variété de dimension 3 compacte et asphérique est virtuellement de Haken (d'après Ian Agol et Daniel T. Wise)*

La vieille conjecture — attribuée à Waldhausen et formulée en 1968 — dite « conjecture virtuellement Haken » était certainement la plus importante question ouverte concernant la topologie des variétés de dimension 3. Depuis la preuve de la conjecture de géométrisation par Grigori Perelman, elle ne restait plus à démontrer que pour les variétés hyperboliques.

C'est ce que vient de faire Ian Agol en s'appuyant sur un travail de fond développé par Dani Wise. Mais Agol démontre bien plus, il démontre une conjecture de Wise qui a de nombreux corollaires : le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte de dimension 3 possède un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre non élémentaire, possède un sous-groupe d'indice fini qui est bi-ordonnable, s'injecte dans  $GL(n, \mathbf{Z})$  pour un certain  $n$ , etc. Au point que Danny Calegari n'a pas hésité à écrire : « It is hard to think of a question about fundamental groups of hyperbolic 3-manifolds that it doesn't answer. » Agol déduit enfin de son théorème que toute variété hyperbolique compacte de dimension 3 possède un revêtement fini qui est homéomorphe à la suspension d'une surface compacte par un difféomorphisme. Partant de ces questions classiques de topologie de petite dimension, je formulerai la conjecture de Wise et tâcherai de donner les grandes lignes de la démonstration d'Agol. Tout cela sera émaillé de divers dessins (de cubes).

Vincent COLIN — *Réalisations géométriques de l'homologie de Khovanov par des homologies de Floer (d'après Abouzaid-Seidel-Smith et Ozsváth-Szabó)*

L'homologie de Khovanov est un invariant des entrelacs de  $S^3$  défini à partir d'un diagramme planaire par de mystérieuses formules combinatoires. Ozsváth-Szabó (2005) et Seidel-Smith (2006) en fournissent des interprétations géométriques dans le cadre de l'homologie de Floer lagrangienne. L'équivalence annoncée récemment par Abouzaid et Smith entre l'homologie de Khovanov et son pendant symplectique devrait permettre de mieux cerner les applications potentielles de l'invariant initial.

Tristan RIVIÈRE — *Méthodes de min-max et la conjecture de Willmore (d'après F.C. Marques et A.A. Neves)*

Il y a bientôt deux ans F.C. Marques et A. Neves ont mis en œuvre dans le cadre des courants rectifiables fermés de dimension 2 dans la sphère 3-dimensionnelle une méthode de min-max en théorie de la mesure géométrique due à F. Almgren et J. Pitts. Ils sont ainsi parvenus à démontrer que le fameux « tore de Clifford » minimise l'aire parmi toutes les surfaces minimales de genre non nul dans la sphère tridimensionnelle. Une des conséquences spectaculaires de ce résultat est la démonstration de la conjecture dite « de Willmore ».

Le but de cet exposé sera de rendre compte du cadre général du résultat de Marques et Neves, de la structure et de certains détails clés de la preuve, ainsi que de la portée de cette contribution remarquable au calcul des variations des surfaces en dimension 3.

Olivier BENOIST — *Construction de courbes sur les surfaces K3 (d'après Bogomolov-Hassett-Tschinkel, Charles, Li-Liedtke, Madapusi Pera, Maulik...)*

La conjecture de Tate prédit l'existence de courbes sur les surfaces algébriques définies sur un corps fini. On présentera des travaux récents de Maulik, Charles et Madapusi Pera, qui ont permis d'achever la démonstration de cette conjecture dans le cas des surfaces K3 (en caractéristique différente de 2). On expliquera également des applications de la conjecture de Tate à la construction de courbes rationnelles sur les surfaces K3, dues à Bogomolov-Hassett-Tschinkel et Li-Liedtke

Erwin BOLTHAUSEN — *Ultrametricity in mean-field spin glasses (after Dmitry Panchenko)*

Ultrametricity lies at the core of the Parisi theory of spin glasses, particularly for the Sherrington-Kirkpatrick model. In a vague sense, it claims that the Gibbs measure is hierarchically organized. This picture was crucial for the original derivation by Parisi of the free energy using the non-rigorous replica method, and also in the later developed cavity method by Mézard and Parisi. However, the first rigorous proof by Talagrand of the Parisi formula