372

ASTÉRISQUE

2015

RIGIDITY OF HIGH DIMENSIONAL GRAPH MANIFOLDS

Roberto FRIGERIO, Jean-François LAFONT, Alessandro SISTO

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 372, 2015

Comité de rédaction

Ahmed Abbes — Damien Gaboriau
Viviane Baladi — Michael Harris
Gérard Besson — Fabrice Planchon
Laurent Berger — Pierre Schapira
Philippe Biane — Bertrand Toën
Hélène Esnault

Éric Vasserot (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 60 € ($ 90)

Abonnement Europe : 530 €, hors Europe : 569 € ($ 853)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2015*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-809-1

Directeur de la publication : Marc Peigné

372

ASTÉRISQUE

2015

RIGIDITY OF HIGH DIMENSIONAL GRAPH MANIFOLDS

Roberto FRIGERIO, Jean-François LAFONT, Alessandro SISTO

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Roberto Frigerio
Dipartimento di Matematica - Largo B. Pontecorvo, 5 - 56127 Pisa, Italy
frigerio@dm.unipi.it

Jean-François Lafont
Department of Mathematics, The Ohio State University, 231 West 18th Avenue, Columbus, OH 43210-1174, USA
jlafont@math.ohio-state.edu

Alessandro Sisto
Department of Mathematics, ETH Zurich, 8092 Zurich, Switzerland
sisto@math.ethz.ch

***Classification mathématique par sujet* (2000). —** 53C24, 20F65; 53C23, 20E08, 20F67, 20F69, 19D35.

***Mots-clefs.* —** Quasi-isometry, quasi-action, graph of groups, CAT(0) space, Borel conjecture, smooth rigidity, Baum-Connes conjecture, asymptotic cone, mapping class group, Kazhdan's property (T), Tits' alternative, co-Hopf property, C^*-simplicity, SQ-universality.

RIGIDITY OF HIGH DIMENSIONAL GRAPH MANIFOLDS

by Roberto FRIGERIO, Jean-François LAFONT and Alessandro SISTO

Abstract. — We define the class of *high dimensional graph manifolds*. These are compact smooth manifolds supporting a decomposition into finitely many pieces, each of which is diffeomorphic to the product of a torus with a finite volume hyperbolic manifold with toric cusps. The various pieces are attached together via affine maps of the boundary tori. We require all the hyperbolic factors in the pieces to have dimension ≥ 3. Our main goal is to study this class of graph manifolds from the viewpoint of rigidity theory.

We show that, in dimensions ≥ 6, the Borel conjecture holds for our graph manifolds. We also show that smooth rigidity holds within the class: two graph manifolds are homotopy equivalent if and only if they are diffeomorphic. We introduce the notion of *irreducible* graph manifolds. These form a subclass which has better coarse geometric properties, in that various subgroups can be shown to be quasi-isometrically embedded inside the fundamental group. We establish some structure theory for finitely generated groups which are quasi-isometric to the fundamental group of an irreducible graph manifold: any such group has a graph of groups splitting with strong constraints on the edge and vertex groups. Along the way, we classify groups which are quasi-isometric to the product of a free abelian group and a non-uniform lattice in $SO(n,1)$. We provide various examples of graph manifolds which do *not* support any locally CAT(0) metric.

Several of our results can be extended to allow pieces with hyperbolic surface factors. We emphasize that, in dimension $= 3$, our notion of graph manifold *does not* coincide with the classical graph manifolds. Rather, it is a class of 3-manifolds that contains some (but not all) classical graph 3-manifolds (we don't allow general Seifert fibered pieces), as well as some non-graph 3-manifolds (we do allow hyperbolic pieces).

***Résumé* (Rigidité des variétés graphées de grande dimension.)** — Ce texte est consacré à la définition et à l'étude systématique des *variétés graphées de grande dimension*. Celles-ci sont des variétés lisses, ayant une décomposition en un nombre fini de morceaux géométriques. Chaque morceau est difféomorphe au produit d'un tore et d'une variété hyperbolique de volume fini dont tous les bouts sont des tores. Les morceaux sont

© Astérisque 372, SMF 2015

recollés par des applications affines des tores qui en sont les bords. Nous exigeons que le facteur hyperbolique dans chaque morceau soit de dimension ≥ 3. Notre but principal est d'établir divers résultats de rigidité pour cette classe de variétés graphées.

Nous démontrons, en dimension ≥ 6, la conjecture de Borel pour les variétés graphées : une variété quelconque est homotopiquement équivalente à une variété graphée si et seulement si elle est homéomorphe à cette même variété graphée. Nous établissons la rigidité lisse pour la classe des variétés graphées : deux variétés graphées sont homotopiquement équivalentes si et seulement si elles sont difféomorphes. Du point de vue de la géométrie à grande échelle, la distorsion des groupes fondamentaux des morceaux dans le groupe fondamental de la variété graphée joue un rôle essentiel. Nous introduisons la notion de *variété graphée irréductible*. Elles forment une sous-classe pour laquelle ces sous-groupes sont toujours non-distordus. Ceci nous permet d'analyser la structure des groupes quasi-isométriques au groupe fondamental d'une variété graphée irréductible: un tel groupe a (virtuellement) une action sur un arbre, avec de fortes contraintes sur les stabilisateurs de sommets et d'arêtes. Cette analyse comprend, entre autre, une classification des groupes quasi-isométriques au produit d'un groupe abélien libre et d'un réseau non-uniforme dans $SO(n,1)$. Nous présentons plusieurs exemples de variétés graphées qui n'admettent *aucune* métrique localement CAT(0).

Certains de nos résultats s'appliquent aussi bien en présence de morceaux ayant commes facteurs des surfaces hyperboliques. Nous précisons que, en dimension trois, notre notion de variété graphée *ne coïncide pas* avec la notion classique de variété graphée. Nos variétés forment une classe comprenant certaines des variétés graphées classiques (mais pas toutes: nous excluons certaines sous-variétés de Seifert), ainsi que des variétés que ne sont pas des variétés graphées classiques (nous admettons des morceaux purement hyperboliques).

CONTENTS

Introduction xi

Part I. Graph manifolds: topological and algebraic properties 1

1. Quasi-isometries and quasi-actions 3
1.1. The quasi-isometry type of a group 3
1.2. The Milnor-Švarz Lemma 4
1.3. From quasi-isometries to quasi-actions 4

2. Generalized graph manifolds 9
2.1. Putting a metric on (extended) graph manifolds 11
2.2. Purely hyperbolic graph manifolds are nonpositively curved 12
2.3. $\pi_1(M)$ as the fundamental group of a graph of groups 14
2.4. The universal cover of M as a tree of spaces 15
2.5. Basic metric properties of $\widetilde{M}$ 18
2.6. Examples not supporting any locally CAT(0) metric 19

3. Topological rigidity 23
3.1. Contractible universal cover 24
3.2. Lower algebraic K-theory 25
3.3. Topological rigidity - the general case 27
3.4. Topological rigidity - (extended) graph manifolds 31
3.5. Baum-Connes Conjecture and consequences 32

4. Isomorphisms preserve pieces 35
4.1. Some properties of wall stabilizers 36
4.2. Characterizing surface pieces 38
4.3. Further properties of wall stabilizers 40
4.4. Isomorphisms quasi-preserve non-surface pieces 42
4.5. Isomorphisms preserve pieces 45

5. Smooth rigidity 47
5.1. Rigidly decomposable pairs 47
5.2. Dehn twists 52

5.3. Proof of Theorem 5.3 54
5.4. Mapping class group 55

6. Algebraic properties 57
6.1. Graphs of groups and groups acting on trees 58
6.2. The graph of groups associated to an (extended) graph manifold 60
6.3. Relative hyperbolicity and hyperbolically embedded subgroups 66
6.4. Kazhdan subgroups 67
6.5. Uniformly exponential growth 68
6.6. The Tits Alternative 69
6.7. Co-Hopf property 72
6.8. C^*-simplicity of acylindrical graphs of groups 75
6.9. SQ-universality 78
6.10. Solvable word problem 79
6.11. Gluings and isomorphism type 84

Part II. Irreducible graph manifolds: coarse geometric properties 91

7. Irreducible graph manifolds 93
7.1. The geometry of chambers and walls 94
7.2. An important consequence of irreducibility 95
7.3. The geometry of neutered spaces 96
7.4. Walls and chambers are quasi-isometrically embedded in the universal covering of irreducible graph manifolds 99

8. Pieces of irreducible graph manifolds are quasi-preserved 109
8.1. The asymptotic cone of a geodesic metric space 109
8.2. Quasi-isometries and asymptotic cones 111
8.3. Tree-graded spaces 113
8.4. The asymptotic cone of $\widetilde{M}$ 114
8.5. A characterization of bi-Lipschitz $(n-1)$-flats in $\widetilde{M}_\omega$ 121
8.6. A characterization of quasi-flats of maximal dimension in $\widetilde{M}$ 123
8.7. Walls and chambers are quasi-preserved by quasi-isometries 124
8.8. Thickness and relative hyperbolicity 125

9. Quasi isometry rigidity, I 129
9.1. The quasi-action of Γ on $\widetilde{M}$ 130
9.2. The image of θ 132
9.3. The kernel of θ 134
9.4. Abelian undistorted normal subgroups are virtually central 136
9.5. Pieces with quasi-isometric fundamental groups 139

10. Quasi isometry rigidity, II 141
10.1. From quasi-actions to actions on trees 141

10.2. The action of Γ^0 on T 142
10.3. Stabilizers of edges and vertices 143
10.4. Graph manifolds with quasi-isometric fundamental groups 144

Part III. Concluding remarks 147

11. Examples not supporting locally CAT(0) metrics 149
11.1. Fiber bundles 149
11.2. Irreducible examples 156

12. Directions for future research 163
12.1. Further algebraic properties 163
12.2. Studying quasi-isometries 164
12.3. Non-positive curvature and differential geometry 166

Bibliography 169