383

ASTÉRISQUE

2016

SUBANALYTIC SHEAVES AND SOBOLEV SPACES

S. GUILLERMOU, G. LEBEAU, A. PARUSIŃSKI,
P. SCHAPIRA & J.-P. SCHNEIDERS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 383, 2016

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 35 € ($ 52)

Abonnement Europe : 472 €, hors Europe : 512 € ($ 768)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-844-2

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

383

ASTÉRISQUE

2016

SUBANALYTIC SHEAVES AND SOBOLEV SPACES

S. GUILLERMOU, G. LEBEAU, A. PARUSIŃSKI,
P. SCHAPIRA & J.-P. SCHNEIDERS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Stéphane Guillermou
Institut Fourier, Université de Grenoble I, BP 74, F-38402 Saint-Martin d'Hères, France
`Stephane.Guillermou@ujf-grenoble.fr`

Gilles Lebeau
Département de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 02, France.
`lebeau@unice.fr`

Adam Parusiński
Univ. Nice Sophia Antipolis, CNRS, LJAD, UMR 7351, F-06108 Nice, France
`adam.parusinski@unice.fr`

Pierre Schapira
Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 6 Institut de Mathématiques de Jussieu, F-75005 Paris France
`pierre.schapira@imj-prg.fr`

Jean-Pierre Schneiders
Institut de Mathématiques, Université de Liège, Belgique
`jpschneiders@ulg.ac.be`

***Classification mathématique par sujet* (2000). —** 16E35, 16W70, 18A25, 18D10, 18D35., 18F20, 32B20, 32C05., 32C38, 32S60, 46E35, 58A03, 58A03.

***Keywords.* —** Cylindrical decomposition, D-modules, derived categories, filtered modules, filtered objects, filtrations, Grothendieck topologies, moderate cohomology, quasi-abelian categories, sheaves, Sobolev spaces, subanalytic sets, subanalytic topology.

SUBANALYTIC SHEAVES AND SOBOLEV SPACES

Stéphane GUILLERMOU, Gilles LEBEAU, Adam PARUSIŃSKI,
Pierre SCHAPIRA and Jean-Pierre SCHNEIDERS

Abstract. — Sheaves on manifolds are perfectly suited to treat local problems, but many spaces one naturally encounters, especially in Analysis, are not of local nature. The subanalytic topology (in the sense of Grothendieck) on real analytic manifolds allows one to partially overcome this difficulty and to define for example sheaves of functions or distributions with temperate growth, but not to make the growth precise.

In this volume, one introduces the linear subanalytic topology, a refinement of the preceding one, and constructs various objects of the derived category of sheaves on the subanalytic site with the help of the Brown representability theorem.

In particular one constructs the Sobolev sheaves. These objects have the nice property that the complexes of their sections on open subsets with Lipschitz boundaries are concentrated in degree zero and coincide with the classical Sobolev spaces.

Another application of this topology is that it allows one to *functorially* endow regular holonomic D-modules with filtrations (in the derived sense).

In the course of the text, one also obtains some results on subanalytic geometry and one makes a detailed study of the derived category of filtered objects in symmetric monoidal categories.

***Résumé* (Faisceaux sous-analytiques et espaces de Sobolev).** — Les faisceaux sur les variétés sont parfaitement adaptés à l'étude des problèmes locaux, mais de nombreux espaces que l'on rencontre naturellement, en particulier en Analyse, ne sont pas de nature locale. L'utilisation de la topologie sous-analytique (au sens de Grothendieck) sur les variétés analytiques réelles permet de surmonter partiellement cette difficulté et de définir par exemple des faisceaux de fonctions ou distributions à croissance tempérée, mais pas de préciser cette croissance.

Dans ce volume, on introduit la topologie sous-analytique linéaire, un raffinement de la précédente et l'on construit divers objets de la catégorie dérivée des faisceaux sur le site sous-analytique à l'aide du théorème de representabilité de Brown.

On construit en particulier les faisceaux de Sobolev. Ces objets ont la bonne propriété que les complexes de leurs sections sur les ouverts à frontière Lipschitz sont concentrés en degré zéro et coïncident avec les espaces de Sobolev classiques.

Une autre application de cette topologie est qu'elle permet de munir *fonctoriellement* les D-modules holonomes réguliers de filtrations (au sens dérivé).

Dans le cours du texte, on obtient aussi des résultats de géométrie analytique réelle et l'on fait une étude détaillée de la catégorie dérivée des objets filtrés dans les catégories monoidales symétriques.

TABLE OF CONTENTS