

**383**

**ASTÉRISQUE**

**2016**

SUBANALYTIC SHEAVES AND SOBOLEV SPACES

S. GUILLERMOU, G. LEBEAU, A. PARUSIŃSKI,  
P. SCHAPIRA & J.-P. SCHNEIDERS

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

---

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 383, 2016

---

*Comité de rédaction*

Ahmed ABBES            Hélène ESNAULT  
Viviane BALADI        Damien GABORIAU  
Gérard BESSON        Michael HARRIS  
Laurent BERGER        Fabrice PLANCHON  
Philippe BIANE         Bertrand TOEN  
Éric VASSEROT (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF Case 916 - Luminy 13288 Marseille Cedex 9 France smf@smf.univ-mrs.fr	Hindustan Book Agency O-131, The Shopping Mall Arjun Marg, DLF Phase 1 Gurgaon 122002, Haryana Inde	AMS P.O. Box 6248 Providence RI 02940 USA www.ams.org
---	---	---

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 35 € (\$52)  
*Abonnement* Europe : 472 €, hors Europe : 512 € (\$768)  
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

Astérisque  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-844-2

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

---

**383**

**ASTÉRISQUE**

**2016**

SUBANALYTIC SHEAVES AND SOBOLEV SPACES

S. GUILLERMOU, G. LEBEAU, A. PARUSIŃSKI,  
P. SCHAPIRA & J.-P. SCHNEIDERS

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Stéphane Guillermou*

Institut Fourier, Université de Grenoble I, BP 74, F-38402 Saint-Martin d'Hères,  
France

Stephane.Guillermou@ujf-grenoble.fr

*Gilles Lebeau*

Département de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose,  
F-06108 Nice Cedex 02, France.

lebeau@unice.fr

*Adam Parusiński*

Univ. Nice Sophia Antipolis, CNRS, LJAD, UMR 7351, F-06108 Nice, France

adam.parusinski@unice.fr

*Pierre Schapira*

Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 6 Institut de Mathématiques de Jussieu,  
F-75005 Paris France

pierre.schapira@imj-prg.fr

*Jean-Pierre Schneiders*

Institut de Mathématiques, Université de Liège, Belgique

jpschneiders@ulg.ac.be

---

*Classification mathématique par sujet (2000).* — 16E35, 16W70, 18A25, 18D10, 18D35., 18F20, 32B20, 32C05., 32C38, 32S60, 46E35, 58A03, 58A03.

*Keywords.* — Cylindrical decomposition, D-modules, derived categories, filtered modules, filtered objects, filtrations, Grothendieck topologies, moderate cohomology, quasi-abelian categories, sheaves, Sobolev spaces, subanalytic sets, subanalytic topology.

## SUBANALYTIC SHEAVES AND SOBOLEV SPACES

Stéphane GUILLERMOU, Gilles LEBEAU, Adam PARUSIŃSKI,  
Pierre SCHAPIRA and Jean-Pierre SCHNEIDERS

**Abstract.** — Sheaves on manifolds are perfectly suited to treat local problems, but many spaces one naturally encounters, especially in Analysis, are not of local nature. The subanalytic topology (in the sense of Grothendieck) on real analytic manifolds allows one to partially overcome this difficulty and to define for example sheaves of functions or distributions with temperate growth, but not to make the growth precise.

In this volume, one introduces the linear subanalytic topology, a refinement of the preceding one, and constructs various objects of the derived category of sheaves on the subanalytic site with the help of the Brown representability theorem.

In particular one constructs the Sobolev sheaves. These objects have the nice property that the complexes of their sections on open subsets with Lipschitz boundaries are concentrated in degree zero and coincide with the classical Sobolev spaces.

Another application of this topology is that it allows one to *functorially* endow regular holonomic D-modules with filtrations (in the derived sense).

In the course of the text, one also obtains some results on subanalytic geometry and one makes a detailed study of the derived category of filtered objects in symmetric monoidal categories.

**Résumé (Faisceaux sous-analytiques et espaces de Sobolev).** — Les faisceaux sur les variétés sont parfaitement adaptés à l'étude des problèmes locaux, mais de nombreux espaces que l'on rencontre naturellement, en particulier en Analyse, ne sont pas de nature locale. L'utilisation de la topologie sous-analytique (au sens de Grothendieck) sur les variétés analytiques réelles permet de surmonter partiellement cette difficulté et de définir par exemple des faisceaux de fonctions ou distributions à croissance tempérée, mais pas de préciser cette croissance.

Dans ce volume, on introduit la topologie sous-analytique linéaire, un raffinement de la précédente et l'on construit divers objets de la catégorie dérivée des faisceaux sur le site sous-analytique à l'aide du théorème de représentabilité de Brown.

On construit en particulier les faisceaux de Sobolev. Ces objets ont la bonne propriété que les complexes de leurs sections sur les ouverts à frontière Lipschitz sont concentrés en degré zéro et coïncident avec les espaces de Sobolev classiques.

Une autre application de cette topologie est qu'elle permet de munir *fonctoriellement* les D-modules holonomes réguliers de filtrations (au sens dérivé).

Dans le cours du texte, on obtient aussi des résultats de géométrie analytique réelle et l'on fait une étude détaillée de la catégorie dérivée des objets filtrés dans les catégories monoidales symétriques.

## TABLE OF CONTENTS

<b>Stéphane Guillermou &amp; Pierre Schapira — Construction of sheaves on the subanalytic site</b> .....	1
Introduction .....	2
Acknowledgments .....	4
1. Subanalytic topologies .....	4
1.1. Linear coverings .....	4
Notations and conventions .....	4
The site $M_{\text{sa}}$ .....	5
The site $M_{\text{sal}}$ .....	5
1.2. Regular coverings .....	9
2. Sheaves on subanalytic topologies .....	12
2.1. Sheaves .....	12
Usual notations .....	12
Sheaves on $M$ and $M_{\text{sa}}$ .....	13
Sheaves on $M$ and $M_{\text{sal}}$ .....	13
Sheaves on $M_{\text{sa}}$ and $M_{\text{sal}}$ .....	14
2.2. $\Gamma$ -acyclic sheaves .....	17
Čech complexes .....	17
Acyclic sheaves .....	18
2.3. The functor $\rho_{\text{sal}}^!$ .....	20
Direct sums in derived categories .....	20
The functor $\text{R}\Gamma(U; \bullet)$ .....	23
The functor $\text{R}\rho_{\text{sal}*}$ .....	24
2.4. Open sets with Lipschitz boundaries .....	25
Normal cones and Lipschitz boundaries .....	25
A vanishing theorem .....	26
3. Operations on sheaves .....	30
3.1. Tensor product and internal hom .....	30
3.2. Operations for closed embeddings .....	30
$f$ -regular open sets .....	30
Inverse and direct images by closed embeddings .....	34
3.3. Operations for submersions .....	36

Another subanalytic topology .....	36
Inverse and direct images .....	36
4. Construction of sheaves .....	38
4.1. Sheaves on the subanalytic site .....	38
Temperate growth .....	38
A cutoff lemma on $M_{\text{sa}}$ .....	39
Gevrey growth .....	39
4.2. Sheaves on the linear subanalytic site .....	40
Temperate growth of a given order .....	40
Gevrey growth of a given order .....	41
Rings of differential operators .....	42
4.3. A refined cutoff lemma .....	43
4.4. A comparison result .....	44
4.5. Sheaves on complex manifolds .....	46
Sheaves on complex manifolds .....	46
Solutions of holonomic $\mathcal{D}$ -modules .....	47
5. Filtrations .....	48
5.1. Derived categories of filtered objects .....	48
Complements on abelian categories .....	48
Abelian tensor categories .....	50
Derived categories of filtered objects .....	50
Complements on filtered objects .....	51
5.2. Filtrations on $\mathcal{O}_{X_{\text{sal}}}$ .....	53
The filtered ring of differential operators .....	54
The $L^\infty$ -filtration on $\mathcal{C}_{M_{\text{sal}}}^{\infty, \text{tp}}$ .....	56
The $L^\infty$ -filtration on $\mathcal{O}_{X_{\text{sal}}}^{\text{tp}}$ .....	56
5.3. A functorial filtration on regular holonomic modules .....	57
References .....	59
<b>Gilles Lebeau — Sobolev spaces and Sobolev sheaves .....</b>	<b>61</b>
1. Introduction .....	62
Acknowledgement .....	63
2. Notations and basic results on Sobolev spaces .....	63
3. The case of Lipschitz $U$ .....	65
The case $s \geq 0$ .....	68
The case $s \leq 0$ .....	70
4. The spaces $X^t(U)$ and $Y^s(U)$ .....	72
4.1. The spaces $X^t(U)$ .....	72
4.2. The spaces $Y^s(U)$ .....	79
5. The sheaf $\mathcal{H}^s$ .....	80
5.1. The sheaf $\mathcal{H}^s$ for $s \leq 0$ .....	81
5.2. The sheaf $\mathcal{H}^s$ on $\mathbb{R}^2$ , with $s \leq 0$ .....	83



6. Appendix .....	86
6.1. Interpolation .....	86
6.2. The usual definition of Sobolev spaces .....	89
The case $s \geq 0$ .....	90
The case $s < 0$ .....	92
References .....	94
<b>Adam Parusiński — <i>Regular subanalytic covers</i></b> .....	95
1. Proofs .....	96
1.1. Reduction to the case $M = \mathbb{R}^n$ . .....	96
1.2. Regular projections .....	97
1.3. Cylindrical decomposition .....	97
1.4. The case of a regular projection .....	98
1.5. Proof of Theorem 0.2 .....	98
1.6. L-regular sets .....	99
1.7. Proof of Theorem 0.3 .....	100
1.8. Proof of Theorem 0.1 .....	101
2. Remarks on the o-minimal case .....	102
References .....	102
<b>Pierre Schapira &amp; Jean-Pierre Schneiders — <i>Derived categories of filtered objects</i></b> .....	103
1. Introduction .....	103
2. A review on quasi-abelian categories .....	104
Derived categories .....	105
Left $t$ -structure .....	106
Derived functors .....	106
3. Filtered objects .....	107
Basic properties of $F_\Lambda(\mathcal{C})$ .....	108
The Rees functor .....	111
4. Filtered modules in an abelian tensor category .....	113
Abelian tensor categories .....	113
$\Lambda$ -rings and $\Lambda$ -modules .....	115
Filtered rings and modules .....	116
Example: modules over a filtered sheaf of rings .....	119
References .....	120

