386

ASTÉRISQUE

2017

REPRÉSENTATIONS DES ESPACES
TORDUS SUR UN GROUPE
RÉDUCTIF CONNEXE p -ADIQUE

Bertrand Lemaire

Guy Henniart

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Comité de rédaction

Ahmed ABBES
Viviane BALADI
Laurent BERGER
Philippe BIANE
Hélène ESNAULT

Philippe EYSSIDIEUX
Damien GABORIAU
Michael HARRIS
Fabrice PLANCHON
Pierre SCHAPIRA

Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille CEDEX 9
France
christian.smf@cirm-math.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs 2017

Vente au numéro : 55 € (\$ 82)

Abonnement électronique : 500 € (\$ 750)

Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € (\$ 1049)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris CEDEX 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

astsmf@ihp.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2017

Tous droits réservés (article L122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L335-2 et suivants du CPI.

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926

ISBN 978-2-85629-851-0

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

ASTÉRIQUE 386

REPRÉSENTATIONS DES ESPACES
TORDUS SUR UN GROUPE
RÉDUCTIF CONNEXE p -ADIQUE

Bertrand Lemaire
Guy Henniart

B. Lemaire

Aix-Marseille Université, Département de Mathématiques, 163 Avenue de Luminy,
Case 901, 13288 - Marseille, France.

E-mail : `bertrand.lemaire@univ-amu.fr`

G. Henniart

Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, CNRS,
91405 Orsay Cedex, France.

E-mail : `Guy.Henniart@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 22E50.

Mots clefs. — Corps local non archimédien, caractère-distribution, espace tordu, caractère (tordu), élément quasi-semi-simple, élément quasi-régulier, fonction caractère, formule d'intégration de Weyl, groupe réductif, intégrale orbitale, représentation admissible, théorème de densité spectrale, transformée de Fourier, théorème de Paley-Wiener.

REPRÉSENTATIONS DES ESPACES TORDUS SUR UN GROUPE RÉDUCTIF CONNEXE p -ADIQUE

Bertrand Lemaire, Guy Henniart

Résumé. — Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien, de caractéristique quelconque. Soient G un groupe réductif connexe défini sur F , et $G^{\natural}$ un G -espace tordu lui aussi défini sur F . On suppose que l'ensemble $G^{\natural}(F)$ n'est pas vide, et on le munit de la topologie définie par F . On fixe un caractère ω (i.e. un homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^{\times}$) de $G(F)$. Dans ce mémoire, on développe la théorie des ω -représentations (complexes, lisses) de $G^{\natural}(F)$ à partir de celle des représentations de $G(F)$. Une ω -représentation de $G^{\natural}(F)$ est par définition la donnée d'une représentation (π, V) de $G(F)$ et d'une application Π de $G^{\natural}(F)$ dans le groupe des $\mathbb{C}$ -automorphismes de V telle que $\Pi(x \cdot \delta \cdot y) = \pi(x) \circ \Pi(\delta) \circ (\omega\pi)(y)$ pour tout $\delta \in G^{\natural}(F)$ et tous $x, y \in G(F)$. Si la représentation sous-jacente π de $G(F)$ est admissible, on peut définir le caractère Θ_{Π} de Π , qui est une distribution sur $G^{\natural}(F)$. Les principaux résultats prouvés dans ce mémoire sont :

- si π est de longueur finie, alors la distribution Θ_{Π} est donnée par une fonction localement constante sur l'ouvert des éléments (quasi)-réguliers de $G^{\natural}(F)$;
- le théorème de Paley-Wiener scalaire, qui décrit l'image de la transformée de Fourier – l'application qui à une fonction localement constante et à support compact ϕ sur $G^{\natural}(F)$ associe la forme linéaire $\Pi \mapsto \Theta_{\Pi}(\phi)$ sur un groupe de Grothendieck adéquat ;
- le théorème de densité spectrale, qui décrit le noyau de la transformée de Fourier.

Abstract (Representations of twisted spaces on a connected reductive p-adic group)

Let F be a locally compact non-Archimedean field, of any characteristic. Let G be a connected reductive group defined over F , and $G^{\natural}$ be a twisted G -space also defined over F . The set $G^{\natural}(F)$ is assumed to be non-empty, and it is endowed with the topology defined by F . We fix a character ω (i.e. a continuous homomorphism in $\mathbb{C}^{\times}$) of $G(F)$. In this memoir, we study the theory of (complex, smooth) ω -representations of $G^{\natural}(F)$, from that of representations of $G(F)$. An ω -representation of $G^{\natural}(F)$ is given by a representation (π, V) of $G(F)$ and a map Π from $G^{\natural}(F)$ into the group of $\mathbb{C}$ -automorphisms of V , such that $\Pi(x \cdot \delta \cdot y) = \pi(x) \circ \Pi(\delta) \circ (\omega\pi)(y)$ for all $\delta \in G^{\natural}(F)$ and all $x, y \in G(F)$. If the underlying representation π of $G(F)$ is admissible, we can define the character Θ_{Π} of Π , which is a distribution on $G^{\natural}(F)$. The main results proved in this memoir are:

- if π is of finite length, then the distribution Θ_{Π} is given by a locally constant function on the open set of (quasi-)regular elements in $G^{\natural}(F)$;
- the scalar Paley-Wiener theorem, which describes the image of the Fourier transform – the map which associate to a compactly supported locally constant function ϕ on $G^{\natural}(F)$ the linear form $\Pi \mapsto \Theta_{\Pi}(\phi)$ on a suitable Grothendieck group;
- the spectral density theorem, which describes the kernel of the Fourier transform.

TABLE DES MATIÈRES

Partie I. CARACTÈRES TORDUS DES REPRÉSENTATIONS ADMISSIBLES (B. Lemaire)	1
1. Introduction	3
2. Caractères tordus d'un groupe localement profini	13
2.1. Module d'un automorphisme de G	13
2.2. Caractères des représentations admissibles de G (rappels)	15
2.3. Caractères tordus de G	16
2.4. Espaces topologiques tordus	17
2.5. Module d'un G -espace tordu	19
2.6. Caractères des ω -représentations admissibles d'un G -espace tordu	21
2.7. Induction compacte	23
2.8. Caractères des induites compactes	25
2.9. Commentaires	32
3. Automorphismes d'un groupe réductif connexe	33
3.1. Groupes algébriques affines ; généralités	33
3.2. Automorphismes	36
3.3. Groupes diagonalisables et tores	37
3.4. Automorphismes semisimples et unipotents	39
3.5. Groupes réductifs connexes	41
3.6. Revêtement universel	44
3.7. Automorphismes quasi-semisimples	45
3.8. Automorphismes quasi-centraux	50
3.9. Automorphismes quasi-semisimples localement finis	52
3.10. Automorphismes réguliers ; les automorphismes intérieurs	53
3.11. Automorphismes réguliers ; le cas général	55
3.12. Éléments réguliers d'un $\mathbf{H}$ -espace tordu	59
3.13. Tores maximaux et sous-espaces de Cartan d'un $\mathbf{H}$ -espace tordu	61

3.14. Orbites dans un $\mathbf{H}$ -espace tordu	62
4. Questions de rationalité	67
4.1. Généralités (rappels)	67
4.2. Généralités; suite	68
4.3. Points rationnels d'un $\mathbf{H}$ -espace tordu défini sur F	70
4.4. La décomposition $\text{Aut}_{F'}(\mathbf{H}) = \text{Int}_{F'}(\mathbf{H}) \rtimes \mathfrak{A}_o$	70
4.5. Automorphismes stabilisant un sous-groupe de Borel défini sur F^{sep}	72
4.6. Automorphismes stabilisant une paire de Borel définie sur F^{sep}	74
4.7. Tores maximaux et sous-espaces de Cartan de $\mathbf{H}^{\natural}(F)$	79
4.8. $\mathbf{H}(F)$ -orbites dans $\mathbf{H}^{\natural}(F)$	80
4.9. La topologie ϖ -adique (cas d'un corps local non archimédien)	81
5. Caractères tordus d'un groupe réductif p-adique	87
5.1. Paires paraboliques de G	87
5.2. Mesures normalisées	88
5.3. Sous-espaces paraboliques de $G^{\natural}$	90
5.4. Éléments réguliers et quasi-réguliers de $G^{\natural}$	92
5.5. L'application $\mathcal{N}_{\theta, g_0} : G \rightarrow G$ pour θ localement fini	95
5.6. La paire parabolique $(P_{[\gamma]}, A_{[\gamma]})$ de G associée à $\gamma \in G^{\natural}$	96
5.7. Le principe de submersion d'Harish-Chandra	101
5.8. Les opérateurs T_{γ} pour $\gamma \in G^{\natural}$ quasi-régulier	103
5.9. Induction parabolique et caractères	106
5.10. Restriction de Jacquet et caractères	108
5.11. Commentaire	113
6. Séries discrètes et représentations cuspidales	115
6.1. Caractères des représentations irréductibles essentiellement de caractère intégrable	115
6.2. Caractères des représentations irréductibles cuspidales	118
7. Intégrales orbitales et caractères	121
7.1. Intégrales orbitales tordues	121
7.2. Descente parabolique	122
7.3. Formule d'intégration de Weyl	124
A. Représentations irréductibles d'un G-espace tordu	133
A.1. Rappels sur les représentations (lisses) irréductibles de G	133
A.2. ω -représentations G -irréductibles de $G^{\natural}$	134
A.3. $(\mathcal{H}^{\natural}, \omega)$ -modules et $(\mathcal{H}_K^{\natural}, \omega)$ -modules	136
A.4. ω -représentations irréductibles de $G^{\natural}$ et $(\mathcal{H}_K^{\natural}, \omega)$ -modules simples	138
A.5. Indépendance linéaire des caractères tordus	143
A.6. La condition (P_2) pour $G^{\natural} = \mathbf{G}^{\natural}(F)$	144
B. Représentations l-modulaires	147
B.1. Généralités [58, ch. 1]	147

B.2. R -représentations lisses	148
B.3. Le principe de submersion d'Harish-Chandra	149
B.4. Induction parabolique et restriction de Jacquet	149
B.5. Commentaires	151
C. Action d'un groupe algébrique et points rationnels	153
C.1. Rappels topologiques	153
C.2. Actions régulières, localement régulières et constructibles	154
C.3. Rappels sur la topologie définie par F	155
C.4. Le théorème de constructibilité	157
C.5. Quelques cas particuliers utiles	158
C.6. Un critère local de séparabilité (rappels)	159
C.7. Produit fibré (rappels)	161
C.8. Restriction à la Weil et morphisme de Frobenius (rappels)	161
C.9. Le lemme clé	163
C.10. Un résultat bien connu	165
C.11. Une conséquence du lemme clé	166
 Partie II. LA TRANSFORMÉE DE FOURIER POUR LES ESPACES TORDUS SUR UN GROUPE RÉDUCTIF p-ADIQUE (B. Lemaire et G. Henniart)	 171
1. Introduction	173
1.1. La transformée de Fourier dans le cas non tordu (rappels)	173
1.2. La transformée de Fourier tordue	174
1.3. Formulation en termes de l'espace tordu de Labesse	175
1.4. État des lieux	176
1.5. Lien avec les travaux de Waldspurger	176
1.6. Réduction à la partie « discrète » de la théorie	177
1.7. Le théorème de Paley-Wiener	178
1.8. Le cocentre tordu $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$	179
1.9. L'application d'Euler-Poincaré	180
1.10. Le théorème de densité spectrale	180
1.11. Des filtrations	182
1.12. Plan de l'article	183
1.13. Des choix	184
 2. Représentations des espaces tordus	 185
2.1. Conventions	185
2.2. Les données	185
2.3. ω -représentations de $G^\natural$	187
2.4. Les représentations $\pi(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$	188
2.5. Le foncteur ι_k pour $k \geq 1$	189
2.6. L'invariant $s(\Pi)$	190
2.7. L'espace $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$	192
2.8. $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$ -modules et $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$ -modules	194

2.9. Les caractères Θ_{Π}	197
2.10. Induction parabolique et restriction de Jacquet	198
2.11. Contragrédiente	201
2.12. Caractères non ramifiés	203
2.13. Quotient de Langlands	206
2.14. Décomposition de Langlands	207
2.15. Support cuspidal et caractères infinitésimaux	210
2.16. Support inertiel	211
2.17. Le « centre » (rappels, cas non tordu)	213
2.18. L'anneau $\mathfrak{Z}(G^{\natural}, \omega)$	214
2.19. Action de $\mathbb{Z}$ sur le « centre »	215
2.20. « Bons » sous-groupes ouverts compacts de G	217
2.21. « Bons » sous-espaces tordus ouverts compacts de $G^{\natural}$	219
2.22. $(H^{\natural}, \omega, B)$ -modules admissibles	221
3. Énoncé du résultat	223
3.1. Le théorème principal	223
3.2. Variante « tempérée » du théorème	225
3.3. Variante « finie » du théorème	226
4. Réduction à la partie « discrète » de la théorie	229
4.1. Le « lemme géométrique »	229
4.2. Les espaces $\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_Q^P, \mathfrak{a}_P^*, \text{etc.}$	233
4.3. Les espaces $\mathfrak{a}_{P^{\natural}}, \mathfrak{a}_{Q^{\natural}}^P, \mathfrak{b}_{P^{\natural}}, \mathfrak{b}_{P^{\natural}}^*, \text{etc.}$	234
4.4. Les morphismes ${}^{\omega}T_{P^{\natural}, \mathbb{C}}$	238
4.5. Actions duales de $\mathfrak{Z}(G)$ et de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural})$	243
4.6. Induction parabolique et restriction de Jacquet : morphismes duaux	245
4.7. Terme constant et caractères des induites paraboliques	247
4.8. Le théorème principal sur la partie « discrète »	248
4.9. Réduction du théorème principal 3.1.2 au Théorème 4.8.1	249
5. Le théorème de Paley-Wiener sur la partie discrète	251
5.1. Support cuspidal des représentations discrètes	251
5.2. Un résultat de finitude	252
5.3. Décomposition des fonctions régulières	253
5.4. Une conséquence du lemme de décomposition	255
5.5. La partie $\Theta' = \Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$ de $\Theta = \Theta(\mathfrak{s})$ est constructible	258
5.6. Décomposition des espaces $\mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ et $\mathcal{F}_{\text{tr}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$	259
5.7. Surjectivité dans le Théorème 4.8.1	261
6. Le théorème de densité spectrale sur la partie discrète	263
6.1. Trace tordue pour les modules projectifs de type fini	263
6.2. Trace tordue (suite)	267
6.3. L'isomorphisme $\mathcal{C}'(A^{\natural}) \simeq \bar{A}^{\natural}$	270
6.4. Variante (sur la condition de projectivité)	275