

**Vincent Guirardel
Gilbert Levitt**

JSJ DECOMPOSITIONS OF GROUPS

ASTÉRISQUE 395

Société Mathématique de France 2017

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France
Numéro 395

Comité de rédaction

Ahmed ABBES	Philippe EYSSIDIEUX
Viviane BALADI	Damien GABORIAU
Laurent BERGER	Michael HARRIS
Philippe BIANE	Fabrice PLANCHON
Hélène ESNAULT	Pierre SCHAPIRA

Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
B.P. 67	P.O. Box 6248
13274 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
christian.smf@cirm-math.fr	www.ams.org

Tarifs 2017

Vente au numéro : 40 € (\$ 60)
Abonnement électronique : 500 € (\$ 750)
Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € (\$ 1049)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
astsmf@ihp.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2017

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN 978-2-85629-870-1

Stéphane SEURET
Directeur de la publication

ASTÉRIQUE 395

JSJ DECOMPOSITIONS OF GROUPS

Vincent Guirardel

Gilbert Levitt

Société Mathématique de France 2017

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

V. Guirardel

Institut de Recherche Mathématique de Rennes,
Université de Rennes 1 et CNRS (UMR 6625),
263 avenue du Général Leclerc, CS 74205, F-35042 RENNES Cédex, France.

E-mail : `vincent.guirardel@univ-rennes1.fr`

G. Levitt

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme (LMNO),
Université de Caen et CNRS (UMR 6139), (Pour Shanghai : Normandie Univ,
UNICAEN, CNRS, LMNO, 14000 Caen, France).

E-mail : `levitt@unicaen.fr`

2010 Mathematics Subject Classification. — 20E08, 20E34, 20F65, 20F67, 57M07, 20E06.

Key words and phrases. — Group, splitting, decomposition, tree, R-tree, outer space, compatibility, acylindricity, slender, hyperbolic, amalgamated product, HNN extension.

The first author acknowledges support from the Institut universitaire de France, ANR project ANR-11-BS01-013, and membership to the Henri Lebesgue center 11-LABX-0020. The second author acknowledges support from ANR-07-BLAN-0141-01 and ANR-2010-BLAN-116-03.

JSJ DECOMPOSITIONS OF GROUPS

Vincent Guirardel, Gilbert Levitt

Abstract. — This is an account of the theory of JSJ decompositions of finitely generated groups, as developed in the last twenty years or so.

We give a simple general definition of JSJ decompositions (or rather of their Bass-Serre trees), as maximal universally elliptic trees. In general, there is no preferred JSJ decomposition, and the right object to consider is the whole set of JSJ decompositions, which forms a contractible space: the JSJ deformation space (analogous to Outer Space).

We prove that JSJ decompositions exist for any finitely presented group, without any assumption on edge groups. When edge groups are slender, we describe flexible vertices of JSJ decompositions as quadratically hanging extensions of 2-orbifold groups.

Similar results hold in the presence of acylindricity, in particular for splittings of torsion-free CSA groups over abelian groups, and splittings of relatively hyperbolic groups over virtually cyclic or parabolic subgroups. Using trees of cylinders, we obtain canonical JSJ trees (which are invariant under automorphisms).

We introduce a variant in which the property of being universally elliptic is replaced by the more restrictive and rigid property of being universally compatible. This yields a canonical compatibility JSJ tree, not just a deformation space. We show that it exists for any finitely presented group.

We give many examples, and we work throughout with relative decompositions (restricting to trees where certain subgroups are elliptic).

Résumé (Décompositions JSJ des groupes). — Ce texte expose la théorie des décompositions JSJ des groupes de type fini, telle qu'elle s'est développée depuis une vingtaine d'années.

Nous donnons une définition simple et générale des décompositions JSJ (plus précisément, de leurs arbres de Bass-Serre) comme arbres universellement elliptiques maximaux. En général il n'y a pas de décomposition privilégiée, et le bon objet à considérer est l'ensemble de toutes les décompositions JSJ, qui forment un espace contractile, l'espace de déformation JSJ (analogue à l'outre-espace).

Nous montrons que tout groupe de présentation finie a des décompositions JSJ, sans hypothèse sur les groupes d'arêtes. Lorsque les groupes d'arêtes sont sveltes,

nous décrivons les sommets flexibles des décompositions JSJ : ce sont des extensions de groupes de 2-orbifolds, attachées de manière quadratique.

Il y a des résultats analogues en présence d'acylindricité, en particulier pour les scindements abéliens des groupes CSA sans torsion, et les scindements des groupes relativement hyperboliques sur des sous-groupes cycliques ou paraboliques. En utilisant les arbres des cylindres, nous obtenons des décompositions JSJ canoniques, invariantes par automorphismes.

Nous introduisons une variante dans laquelle l'ellipticité universelle est remplacée par la compatibilité universelle, qui est plus restrictive et plus rigide. On obtient ainsi un arbre de compatibilité JSJ canonique (pas seulement un espace de déformation), qui existe toujours lorsque le groupe est de présentation finie.

Nous donnons de nombreux exemples, et nous traitons complètement le cas relatif (on se restreint aux arbres dans lesquels certains sous-groupes donnés sont elliptiques).

CONTENTS

Introduction	1
1. From 3-manifolds to groups	1
2. Definition of JSJ decompositions	3
3. Existence	5
4. Uniqueness	5
JSJ trees are not unique... ..	5
... but sometimes there is a canonical JSJ tree	6
5. Description: Quadratically hanging vertex groups	7
6. Relative decompositions	9
7. Acylindricity	9
8. Compatibility JSJ	11
9. Contents of the book	13
10. What is new	16
PART I. Preliminaries	19
1.1. Basic notions and notations	19
1.2. Trees	20
1.3. $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -trees, one-endedness	22
1.4. Maps between trees, compatibility, deformation spaces	23
1.5. Slenderness, smallness	24
1.6. Accessibility	26
1.7. Relative finite generation and presentation	26
PART II. The JSJ deformation space	29
2. Definition and existence	29
2.1. Standard refinements	29
2.2. Universal ellipticity	32
2.3. The JSJ deformation space	33
2.4. Existence of the JSJ deformation space: the non-relative case	34

2.5. Existence: the relative case	35
2.6. Relation with other constructions	38
3. Examples of JSJ decompositions	39
3.1. Free groups	39
3.2. Free splittings: the Grushko deformation space	39
3.3. Splittings over finite groups: the Stallings-Dunwoody deformation space	40
3.4. Splittings of small groups	40
3.5. Generalized Baumslag-Solitar groups	41
3.6. Locally finite trees	41
3.7. RAAGs	42
3.8. Parabolic splittings	42
3.9. Non-rigid examples	43
4. A few useful facts	44
4.1. Changing edge groups	44
4.2. Incidence structures of vertex groups	46
4.3. JSJ decompositions of vertex groups	48
4.4. Relative JSJ decompositions through fillings	50
PART III. Flexible vertices	53
5. Quadratically hanging vertices	54
5.1. 2-orbifolds and their splittings	54
5.2. Definition and properties of quadratically hanging subgroups	61
5.3. Quadratically hanging subgroups are elliptic in the JSJ	65
5.4. Peripheral structure of quadratically hanging vertices	68
5.5. Flexible vertices of abelian JSJ decompositions	70
6. JSJ decompositions over slender groups	71
6.1. Statement of results	71
6.2. Reduction to totally flexible groups	74
6.3. Fujiwara-Papasoglu's core	76
6.4. The regular neighborhood	80
6.5. Constructing a filling pair of splittings	84
6.6. Flexible groups are QH when trees are minuscule	88
6.7. All splittings of a totally flexible group are minuscule	89
6.8. Slenderness in trees	91
6.9. Slender flexible groups	92
PART IV. Acylindricity	95
7. Trees of cylinders	96
7.1. Definition	96
7.2. Acylindricity	100
7.3. Small domination	101
7.4. Compatibility	103
8. Constructing JSJ decompositions using acylindricity	104
8.1. Uniform acylindricity	105

8.2. Acylindricity up to small groups	112
9. Applications	116
9.1. CSA groups	117
9.2. Γ -limit groups and K -CSA groups	118
9.3. Relatively hyperbolic groups	121
9.4. Virtually cyclic splittings	124
9.5. The \mathcal{X}_{\max} -JSJ decomposition	125
PART V. Compatibility	131
10. The compatibility JSJ tree	131
10.1. Existence of the compatibility JSJ space	132
10.2. The compatibility JSJ tree T_{co}	135
11. Examples	136
11.1. Free groups	136
11.2. Algebraic rigidity	137
11.3. Free products	137
11.4. (Generalized) Baumslag-Solitar groups	137
11.5. The canonical decomposition of Scott and Swarup	138
11.6. Poincaré duality groups	138
11.7. Trees of cylinders	139
Appendix A. \mathbb{R}-trees, length functions, and compatibility	143
A.1. Metric trees and length functions	143
A.2. From length functions to trees	145
A.3. Compatibility and length functions	148
A.4. Common refinements	151
A.5. Arithmetic of trees	152
A.6. Reading actions on \mathbb{R} -trees	154
Bibliography	157
Index	163

