

398

ASTÉRISQUE

2018

L-GROUPS AND THE LANGLANDS PROGRAM
FOR COVERING GROUPS

Wee Teck Gan, Fan Gao & Martin H. Weissman

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 398, 2018

Comité de rédaction

Ahmed ABBES Hélène ESNAULT
Viviane BALADI Philippe EYSSIDIEUX
Laurent BERGER Michael HARRIS
Philippe BIANE Alexandru OANCEA
Nicolas BURQ Fabrice PLANCHON
Damien CALAQUE
Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
Christian.munusami@smf.emath.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 50 € (\$ 75)

Abonnement Europe : 665 €, hors Europe : 718 € (\$ 1 077)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

nathalie.christiaen@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2018

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN : 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-845-9

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

398

ASTÉRISQUE

2018

L-GROUPS AND THE LANGLANDS PROGRAM
FOR COVERING GROUPS

Wee Teck Gan, Fan Gao & Martin H. Weissman

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Wee Teck Gan

Department of Mathematics, National University of Singapore, 10 Lower Kent Ridge
Road Singapore 119076
matgwt@nus.edu.sg

Fan Gao

Department of Mathematics, Purdue University, 150 N. University Street, West
Lafayette, IN 47907
gaofan.math@gmail.com

Martin H. Weissman

Department of Mathematics, University of California, Santa Cruz, CA 95064
weissman@ucsc.edu

L-GROUPS AND THE LANGLANDS PROGRAM FOR COVERING GROUPS

Wee Teck Gan, Fan Gao & Martin H. Weissman

Abstract. — This volume proposes an extension of the Langlands program to covers of quasisplit groups, where covers are those that arise from central extensions of reductive groups by K_2 . By constructing an L-group for any such cover, one may conjecture a parameterization of genuine irreducible representations by Langlands parameters. Two constructions of the L-group are given, and related to each other in a final note. The proposed local Langlands conjecture for covers (LLCC) is proven for covers of split tori, spherical representations in the p-adic case, and discrete series for double-covers of real semisimple groups. The introduction of the L-group allows one to define partial L-functions and functoriality, including base change, for representations of covering groups.

Résumé (L-groupes et le programme de Langlands pour les revêtements de groupes réductifs.) — Ce volume propose une extension du programme de Langlands aux revêtements des groupes réductifs quasi-déployés qui proviennent des extensions centrales de ces groupes par K_2 . On construit un L-groupe pour un tel revêtement, et on conjecture une paramétrisation de ses représentations irréductibles « spécifiques » (en anglais, « genuine ») par les paramètres de Langlands à valeurs dans ce L-groupe. En fait on donne deux constructions du L-groupe, qui sont reliées l'une à l'autre en fin d'article. La conjecture de Langlands locale proposée pour ces revêtements (LLCC) est prouvée pour les revêtements de tores déployés, les représentations sphériques dans le cas p-adique et les séries discrètes pour les revêtements doubles de groupes semi-simples réels. L'introduction du L-groupe permet de définir des fonctions L partielles et d'exprimer la fonctorialité, y compris le changement de base, pour ces représentations de revêtements.

TABLE OF CONTENTS

WEE TECK GAN & FAN GAO & MARTIN H. WEISSMAN — <i>L</i> -groups and the Langlands program for covering groups: a historical introduction	1
1. Generalities	1
1.1. Definition	2
1.2. Definition	2
1.3. Categorical point of view	3
1.4. Cohomological interpretation	3
1.5. $(G, -)$ as a moduli functor	4
Question	5
1.6. Universal extensions	5
1.7. Condition for representability	5
1.8. Relative fundamental groups	6
1.9. Restricted direct product	6
2. Abstract Chevalley Groups	7
2.1. Steinberg’s construction of E_G	7
2.2. Steinberg’s cocycles	8
2.3. Moore’s upper bound for $\pi_1(G)$	9
2.4. Definition	10
2.5. Matsumoto’s determination of $\pi_1(G)$	11
3. Groups over Local Fields	11
3.1. The case of split groups	12
3.2. Deodhar’s work for quasi-split groups	13
3.3. The work of Prasad-Raghunathan for general k -isotropic groups	14
4. Adelic Groups	14
4.1. Local-to-global	14
5. Brylinski-Deligne Theory	15
6. Representation Theory and Automorphic Forms	17
6.1. Segal-Shale-Weil representation	17
6.2. The work of Kubota and Patterson	17
6.3. Shimura’s correspondence	18
6.4. Kazhdan-Patterson covering and Flicker-Kazhdan lifting	18
6.5. The work of Waldspurger	19

6.6. Fourier coefficients of metaplectic Eisenstein series and generalized theta functions	20
6.7. Automorphic L-functions	20
6.8. Savin's Hecke algebra correspondence	21
6.9. Character identities	21
6.10. Real groups	21
6.11. Invariant harmonic analysis, Eisenstein series and trace formula	22
7. A Langlands program for Brylinski-Deligne extensions	23
7.1. What constitutes a Langlands program?	23
7.2. Dual Groups	24
7.3. Endoscopy	24
7.4. This volume	24
References	26
MARTIN H. WEISSMAN — <i>L-groups and parameters for covering groups</i>	33
Introduction	33
Constructions and conjectures	33
Further questions	37
Philosophies	38
Acknowledgments	38
Notation	38
Part I. Covering groups and their L-groups	39
1. Covering groups	39
1.1. Reductive groups	40
1.2. Covers	40
1.3. Well-aligned homomorphisms	42
2. The dual group	43
2.1. The Langlands dual group	44
2.2. The dual group of a cover	44
2.3. Well-aligned functoriality	46
2.4. Change of base scheme	48
2.5. Parabolic subgroups	49
2.6. Weyl action on the dual torus	49
2.7. Specific cases	50
2.7.1. Method for simply-connected groups	50
2.7.2. $\mathbf{SL}_{\ell+1}$	50
2.7.3. $\mathbf{Spin}_{2\ell+1}$	52
2.7.4. $\mathbf{Sp}_{2\ell}$	52
2.7.5. $\mathbf{Spin}_{2\ell}$	53
2.7.6. Exceptional groups	54
2.7.7. \mathbf{GL}_r	55
2.7.8. \mathbf{GSp}_{2r}	55
3. The gerbe associated to a cover	56

3.1. The gerbe associated to a cover of a torus	56
3.2. The gerbe of liftings	58
3.3. The Whittaker torsor	59
3.4. Well-aligned functoriality	62
3.5. Well-definedness	64
3.5.1. The isomorphism $\mathbf{Int}(t) \sim \mathbf{Id}$	65
3.6. Change of base scheme	68
3.7. Parabolic subgroups	69
3.8. Weyl action on the gerbe associated to the cover of the torus	69
4. The metaGalois group	73
4.1. Construction of the metaGalois group	73
4.1.1. Local fields	74
4.1.2. The local integral case	74
4.1.3. Global fields	75
4.1.4. Compatibilities	75
4.2. The Brauer class	76
4.3. Splitting by additive characters	77
4.3.1. Local fields	78
4.3.2. The local integral case	79
4.3.3. Global fields	79
4.4. Restriction	79
5. L-groups, parameters, L-functions	81
5.1. L-groups	81
5.2. Parameters	82
5.3. L-functions	84
5.4. The L-group of a cover	85
5.5. Well-aligned functoriality	86
5.6. Local-global compatibility	87
5.7. Parabolic subgroups	88
5.8. The Weyl-group action on the L-group of a cover of torus	89
Part II. Genuine representations	97
6. Local fields	97
6.1. Unitary, discrete series, and tempered representations	98
6.2. Tori	99
6.3. Central core character	100
6.4. Characters and pouches	102
6.5. Twisting	104
6.6. Langlands classification	105
7. Spherical representations	107
7.1. Hecke algebras	108
8. Automorphic representations	110
8.1. Admissible and unitary representations	110
8.2. Automorphic representations	112

Part III. Parameters for split tori	113
9. A tale of two functors	113
9.1. The functor of genuine characters	114
9.2. The functor of Weil parameters	115
9.3. The goal	117
10. Deligne's construction	118
10.1. Dual extensions	119
10.2. Genuine characters and splittings	120
10.3. A natural isomorphism	121
11. Weil parameters as splittings	123
12. Parameterization	125
12.1. Incarnated covers	126
12.2. The extension ${}^D\tilde{T}$	127
12.3. Change of basis	130
12.4. Parameters	131
12.5. Change of basis	135
12.6. Isomorphism of functors	137
13. The integral case	140
13.1. Parameterization by splittings	140
13.2. Unramified Weil parameters	142
13.3. Spherical/Unramified comparison	143
14. Global case	145
14.1. Parameterization by splittings	146
14.2. Global Weil parameters	147
14.3. Global comparison	149
15. Split tori	151
Part IV. Other parameterizations	152
16. Spherical/Unramified parameterization	152
16.1. Parameterization	152
16.1.1. Satake step	153
16.1.2. Support step	153
16.1.3. Parameterization for sharp covers of split tori	153
16.1.4. Split and unramified parameters	154
16.1.5. Semisimple twisted conjugacy classes	155
16.2. Automorphic L-functions	155
17. Sharp covers of anisotropic real tori	156
18. Discrete series for covers of real semisimple groups	160
18.1. Harish-Chandra classification	160
18.2. Discrete series parameters	161
Torsors, gerbes, and fundamental groups	172
A.1. Local systems on S	173
A.2. Torsors on S	173
A.3. Gerbes on S	175

A.3.1. Functors of gerbes	176
A.3.2. Pushouts	177
A.3.3. The gerbe of liftings	177
A.3.4. The gerbe of n th roots	177
A.4. Fundamental group	178
References	182

WEE TECK GAN & FAN GAO — *The Langlands-Weissman Program for Brylinski-Deligne extensions*

176	187
1. Introduction	188
1.1. Covering groups	188
1.2. Brylinski-Deligne theory	189
1.3. Dual and L-groups	189
1.4. The L-group extension	190
1.5. Results of this paper	190
Acknowledgments	195
2. Brylinski-Deligne Extensions	195
2.1. Multiplicative K_2 -torsors	196
2.2. Split torus	196
2.3. Simply-connected groups	197
2.4. Rigidifying \mathcal{E}_Q	197
2.5. General reductive groups	198
2.6. Bisectors and Incarnation	200
2.7. Fair bisectors	202
2.8. The case $Q = 0$	202
2.9. z -extensions	203
2.10. Running example	204
3. Topological Covering Groups	204
3.1. BD covering groups	204
3.2. Canonical unipotent section	205
3.3. Covering torus \bar{T}	205
3.4. The torus $T_{Q,n}$	206
3.5. The kernel of h	206
4. Tame Case	207
4.1. The tame extension	207
4.2. Residual extension	208
4.3. Classification	208
4.4. Splitting of \bar{K}	208
4.5. Determining $\tilde{\mathbb{G}}_\kappa$	209
4.6. Running example	211
5. Dual and L -Groups	212
5.1. Dual group à la Finkelberg-Lysenko-McNamara-Reich	212
5.2. L-group à la Weissman	213

5.3. Description using bisectors	215
5.4. Running example	215
5.5. Functoriality for Levi subgroups	216
5.6. Functoriality for z -extensions	217
6. Distinguished Splittings of L-Groups	218
6.1. Splittings of $E_1 + E_2$	218
6.2. Obstruction	220
Obstruction 1	220
Obstruction 2	220
6.3. Existence of splitting	220
6.4. Distinguished splitting,	221
Definition	221
Obstruction 3	221
6.5. Weyl invariance	222
6.6. Splitting of ${}^L\overline{G}$	222
6.7. Running example	223
7. Construction of Distinguished Genuine Characters	224
7.1. Reduction to rank 1 case	224
7.2. The definition	225
8. LLC for Covering Tori	226
8.1. LLC for $\overline{T}_{Q,n}$	226
8.2. Construction for \overline{T}	227
8.3. LLC for \overline{T}	227
9. LLC for Unramified Representations	228
9.1. Torus case	228
9.2. Satake isomorphism	229
9.3. W -equivariance of LLC	230
9.4. Passing to dual side	231
9.5. Representation ring	232
10. L-Groups: Second Take	233
10.1. The case $Q = 0$	233
10.2. Modification of L -group	234
10.3. Relation with ${}^L\overline{G}_\eta$	236
10.4. The modified dual group	236
10.5. Running example	237
11. The LLC	237
11.1. L-parameters	237
11.2. Local L -factors	237
11.3. The LLC	238
11.4. Reduction to $\eta = 1$	238
11.5. Reduction to discrete series	239
11.6. The example of Mp_{2n}	239