

**425**

**ASTÉRISQUE**

**2021**

NORMS IN MOTIVIC HOMOTOPY THEORY

Tom BACHMANN & Marc HOYOIS

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

---

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 425, 2021

---

*Comité de rédaction*

|                     |                  |
|---------------------|------------------|
| Marie-Claude ARNAUD | Fanny KASSEL     |
| Christophe BREUIL   | Eric MOULINES    |
| Damien CALAQUE      | Alexandru OANCEA |
| Philippe EYSSIDIEUX | Nicolas RESSAYRE |
| Christophe GARBAN   | Sylvia SERFATY   |
| Colin GUILLARMOU    |                  |
| Nicolas BURQ (dir.) |                  |

*Diffusion*

|  |   |
|--|---|
| Maison de la SMF   | AMS   |
| Case 916 - Luminy  | P.O. Box 6248                                       |
| 13288 Marseille Cedex 9  | Providence RI 02940                                 |
| France   | USA   |
| <a href="mailto:commandes@smf.emath.fr">commandes@smf.emath.fr</a> | <a href="http://www.ams.org">http://www.ams.org</a> |

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 45 € (\$ 68)

*Abonnement* Europe : 665 €, hors Europe : 718 € (\$ 1077)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat*

Astérisque  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Fax: (33) 01 40 46 90 96  
[asterisque@smf.emath.fr](mailto:asterisque@smf.emath.fr) • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2021

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-939-5

doi:10.24033/ast.1147

Directeur de la publication : Fabien Durand

---

**425**

**ASTÉRISQUE**

**2021**

**NORMS IN MOTIVIC HOMOTOPY THEORY**

Tom BACHMANN & Marc HOYOIS

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

*Tom Bachmann*  
Mathematisches Institut  
Universität München  
Theresienstr. 39  
80333 München  
Germany  
tom.bachmann@zoho.com

*Marc Hoyois*  
Fakultät für Mathematik  
Universität Regensburg  
93040 Regensburg  
Germany  
marc.hoyois@ur.de

Texte reçu le 28 mai 2018 ; modifié le 8 avril 2020 ; accepté le 27 mai 2020.

---

**Mathematical Subject Classification (2010).** — 14F42, 19E15.

**Keywords.** — Motivic homotopy theory, highly structured ring spectra, norms, multiplicative transfers.

**Mots-clefs.** — Théorie de l'homotopie motivique, spectres en anneaux hautement structurés, normes, transferts multiplicatifs.

# NORMS IN MOTIVIC HOMOTOPY THEORY

by Tom BACHMANN & Marc HOYOIS

**Abstract.** — If  $f: S' \rightarrow S$  is a finite locally free morphism of schemes, we construct a symmetric monoidal “norm” functor  $f_{\otimes}: \mathcal{H}_*(S') \rightarrow \mathcal{H}_*(S)$ , where  $\mathcal{H}_*(S)$  is the pointed unstable motivic homotopy category over  $S$ . If  $f$  is finite étale, we show that it stabilizes to a functor  $f_{\otimes}: \mathcal{SH}(S') \rightarrow \mathcal{SH}(S)$ , where  $\mathcal{SH}(S)$  is the  $\mathbb{P}^1$ -stable motivic homotopy category over  $S$ . Using these norm functors, we define the notion of a *normed motivic spectrum*, which is an enhancement of a motivic  $E_{\infty}$ -ring spectrum. The main content of this text is a detailed study of the norm functors and of normed motivic spectra, and the construction of examples. In particular: we investigate the interaction of norms with Grothendieck’s Galois theory, with Betti realization, and with Voevodsky’s slice filtration; we prove that the norm functors categorify Rost’s multiplicative transfers on Grothendieck–Witt rings; and we construct normed spectrum structures on the motivic cohomology spectrum  $\mathrm{HZ}$ , the homotopy K-theory spectrum  $\mathrm{KGL}$ , and the algebraic cobordism spectrum  $\mathrm{MGL}$ . The normed spectrum structure on  $\mathrm{HZ}$  is a common refinement of Fulton and MacPherson’s multiplicative transfers on Chow groups and of Voevodsky’s power operations in motivic cohomology.

**Résumé.** (Normes en théorie de l’homotopie motivique) — Pour  $f: S' \rightarrow S$  un morphisme de schémas fini et localement libre, on construit un foncteur « norme » monoïdal symétrique  $f_{\otimes}: \mathcal{H}_*(S') \rightarrow \mathcal{H}_*(S)$ , où  $\mathcal{H}_*(S)$  est la catégorie homotopique motivique pointée sur  $S$ . Si  $f$  est un revêtement étale, on montre qu’il se prolonge en un foncteur  $f_{\otimes}: \mathcal{SH}(S') \rightarrow \mathcal{SH}(S)$ , où  $\mathcal{SH}(S)$  est la catégorie homotopique motivique  $\mathbb{P}^1$ -stable sur  $S$ . À l’aide de ces foncteurs norme, on définit la notion de *spectre motivique normé*, qui améliore celle de spectre motivique en anneaux  $E_{\infty}$ . L’objet principal de ce texte est une étude détaillée des foncteurs norme et des spectres motiviques normés, ainsi que la construction de nombreux exemples. En particulier : on étudie la compatibilité des normes avec la théorie de Galois de Grothendieck, avec la réalisation de Betti, et avec la filtration par motifs de Voevodsky ; on montre que les foncteurs norme sont une catégorification des transferts multiplicatifs de Rost entre anneaux de Grothendieck–Witt ; et on construit des structures de spectre normé sur le spectre de la cohomologie motivique  $\mathrm{HZ}$ , le spectre de la K-théorie algébrique  $\mathrm{KGL}$ , et le spectre du cobordisme algébrique  $\mathrm{MGL}$ . La structure de spectre normé sur  $\mathrm{HZ}$