427

ASTÉRISQUE

2021

LIOUVILLE QUANTUM GRAVITY AS A MATING OF TREES

Bertrand DUPLANTIER, Jason MILLER & Scott SHEFFIELD

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 427, 2021

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`http://www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 45 € ($ 68)

Abonnement Europe : 665 €, hors Europe : 718 € ($ 1 077)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
`asterisque@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN 978-2-85629-941-8
doi:10.24033/ast.1149

Directeur de la publication : Fabien Durand

427 ASTÉRISQUE

2021

LIOUVILLE QUANTUM GRAVITY AS A MATING OF TREES

Bertrand DUPLANTIER, Jason MILLER & Scott SHEFFIELD

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Bertrand Duplantier
Université Paris-Saclay
CNRS, CEA, Institut de Physique Théorique
91191 Gif-sur-Yvette, France

Jason Miller
Statistical Laboratory
Center for Mathematical Sciences
University of Cambridge
Cambridge CB3 0WB, UK

Scott Sheffield
Department of Mathematics
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, MA, USA

Texte reçu le 19 octobre 2019 ; accepté le 27 mai 2020.

Acknowledgments.— We have benefited from discussions with many individuals, including (and not limited to) Nathanael Berestycki, Dmitry Chelkak, Nicolas Curien, Hugo Duminil-Copin, Christophe Garban, Richard Kenyon, Greg Lawler, Jean-François Le Gall, Grégory Miermont, Asaf Nachmias, Rémi Rhodes, Steffen Rohde, Oded Schramm, Stanislav Smirnov, Xin Sun, Vincent Vargas, Sam Watson, Wendelin Werner, and Hao Wu. We also thank Ewain Gwynne for helpful comments on an earlier version of this article and Ken Stephenson for helping us use his circle packing software. We also thank participants of a 2017 Oberwolfach seminar about this paper who gave us additional feedback on the manuscript, including (among others) Juhan Aru, Ellen Powell, Lukas Schoug, and Avelio Sepulveda. B.D. was partially supported by the CNRS grant PICS06769 and by the ANR grant GRAAL ANR-14-CE25-0014. J.M. was partially supported by the NSF grant DMS-1204894. S.S. was partially supported by NSF grants DMS-1712862 and DMS-1209044 and Simons Fellowship with award number 306120.

We also thank several anonymous referees for feedback which led to substantial improvements to the exposition.

Mathematical Subject Classification (2010).— 60D05, 82B20, 82B41, 60J67.
Keywords.— Gaussian free field, continuum random trees, Liouville quantum gravity, Lévy tree, quantum zipper, quantum zipper, SLE, Fortuin-Kasteleyn, quantum wedges.
Mots-clefs.— Champ libre gaussien, arbres continus aléatoires, gravité quantique de Liouville, arbres de Lévy, fermeture éclair quantique, SLE, Fortuin-Kasteleyn, coins quantiques.

LIOUVILLE QUANTUM GRAVITY AS A MATING OF TREES

by Bertrand DUPLANTIER, Jason MILLER & Scott SHEFFIELD

Abstract.—There is a simple way to "glue together" a coupled pair of continuum random trees (CRTs) to produce a topological sphere. The sphere comes equipped with a measure and a space-filling curve (which describes the "interface" between the trees). We present an explicit and canonical way to embed the sphere in $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. In this embedding, the measure is a form of Liouville quantum gravity (LQG) with parameter $\gamma \in (0,2)$, and the curve is space-filling $\mathrm{SLE}_{\kappa'}$ with $\kappa' = 16/\gamma^2$.

Achieving this requires us to develop an extensive suite of tools for working with LQG surfaces. We explain how to conformally weld so-called "quantum wedges" to obtain new quantum wedges of different weights. We construct finite-volume quantum disks and spheres of various types, and give a Poissonian description of the set of quantum disks cut off by a boundary-intersecting $\mathrm{SLE}_\kappa(\rho)$ process with $\kappa \in (0,4)$. We also establish a *Lévy tree* description of the set of quantum disks to the left (or right) of an $\mathrm{SLE}_{\kappa'}$ with $\kappa' \in (4,8)$. We show that given two such trees, sampled independently, there is a.s. a canonical way to "zip them together" and recover the $\mathrm{SLE}_{\kappa'}$.

The law of the CRT pair we study was shown in an earlier paper to be the scaling limit of the discrete tree/dual-tree pair associated to an FK-decorated random planar map (RPM). Together, these results imply that FK-decorated RPM scales to CLE-decorated LQG in a certain "tree structure" topology.

Résumé. *(La gravité quantique de Liouville comme accouplement d'arbres)*— Il existe une manière simple de « recoller » une paire couplée d'arbres continus aléatoires afin d'obtenir une sphère topologique. La sphère vient équipée d'une mesure et d'une courbe remplissante (qui décrit l'« interface » des arbres). Nous présentons une manière explicite et canonique de plonger cette sphère dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Dans ce plongement, la mesure est une certaine forme de gravité quantique de Liouville de paramètre $\gamma \in (0,2)$, et la courbe est un $\mathrm{SLE}_{\kappa'}$ remplissant l'espace, avec $\kappa' = 16/\gamma^2$.

Y parvenir requiert de développer une vaste palette d'outils pour travailler avec les surfaces de gravité quantique de Liouville. Nous montrons comment souder conformément ce que nous appellons des « coins quantiques », afin d'obtenir de nouveaux coins quantiques de poids différents. Nous construisons en volume fini disques et sphères quantiques de types variés, et donnons une description poissonienne de l'ensemble