

435

ASTÉRISQUE

2022

PARABOLIC HECKE EIGENSHEAVES

Ron DONAGI & Tony PANTEV

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 435, 2022

Comité de rédaction

Marie-Claude ARNAUD Alexandru OANCEA
Christophe BREUIL Nicolas RESSAYRE
Philippe EYSSIDIEUX Rémi RHODES
Colin GUILLARMOU Sylvia SERFATY
Fanny KASSEL Sug Woo SHIN
Eric MOULINES
Nicolas BURQ (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF AMS
Case 916 - Luminy P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9 Providence RI 02940
France USA
commandes@smf.emath.fr <http://www.ams.org>

Tarifs

Vente au numéro : 50 € (\$ 75)
Abonnement Europe : 665 €, hors Europe : 718 € (\$ 1 077)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2022

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-960-9

doi:10.24033/ast.1178

Directeur de la publication : Fabien Durand

435

ASTÉRISQUE

2022

PARABOLIC HECKE EIGENSHEAVES

Ron DONAGI & Tony PANTEV

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ron Donagi

Department of Mathematics, University of Pennsylvania David Rittenhouse Lab.,
209 South 33rd Street, Philadelphia, PA 19104-6395, USA

Tony Pantev

Department of Mathematics, University of Pennsylvania David Rittenhouse Lab.,
209 South 33rd Street, Philadelphia, PA 19104-6395, USA

Texte reçu le 9 octobre 2019 ; révisé le 3 mars 2019 ; accepté le 6 septembre 2019.

Mathematical Subject Classification (2010). — 14D24, 22E57, 14F10, 14A30, 14F08, 14H60, 14D23.

Keywords. — Non-abelian Hodge theory, Hitchin fibration, \mathcal{D} -modules, parabolic bundles, geometric Langlands correspondence, Hecke property, spectral cover, abelianization.

Mots-clefs. — Théorie de Hodge non-abélienne, fibration de Hitchin, \mathcal{D} -modules, fibrés paraboliques, correspondance de Langlands géométrique, propriété de Hecke, revêtement spectrale, abélianisation.

PARABOLIC HECKE EIGENSHEAVES

by Ron DONAGI & Tony PANTEV

Abstract. — We study the Geometric Langlands Conjecture (GLC) for rank two flat bundles on the projective line C with tame ramification at five points $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. In particular we construct the automorphic \mathcal{D} -modules predicted by GLC on the moduli space of rank two parabolic bundles on $(C, \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\})$. The construction uses non-abelian Hodge theory and a Fourier-Mukai transform along the fibers of the Hitchin fibration to reduce the problem to one in classical projective geometry on the intersection of two quadrics in \mathbb{P}^4 .

Résumé. (Faisceaux propres de Hecke paraboliques) — Nous étudions la conjecture géométrique de Langlands (CGL) pour les fibrés plats de rang deux sur la ligne projective C avec une ramification modérée en cinq points $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. En particulier, nous construisons les \mathcal{D} -modules automorphes prédits par CGL sur l'espace des modules de fibrés paraboliques de rang deux sur $(C, \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\})$. La construction utilise la théorie de Hodge non abélienne et une transformé de Fourier-Mukai le long des fibres de la fibration de Hitchin pour réduire le problème à une question en géométrie projective classique à propos l'intersection de deux quadriques dans \mathbb{P}^4 .

CONTENTS

1. Introduction	1
1.1. The conjecture	1
1.2. The program	5
1.3. Parabolic version	6
1.4. Our results	8
2. Parabolic objects	15
2.1. Parabolic bundles and Higgs bundles	15
2.2. Parabolic Chern classes	19
2.3. Natural operations	19
2.4. Stability	25
3. Moduli Spaces	29
3.1. A family of moduli problems	30
3.2. Birational models and chambers	32
3.3. The GIT construction	36
4. The Hecke correspondence	55
4.1. Hecke correspondences of moduli stacks and moduli spaces	55
4.2. The Hecke correspondence on X	57
5. The modular spectral cover	69
5.1. The fiber of the Hitchin map	69
5.2. The base locus	72
5.3. The case of nilpotent residues	76
5.4. Wobbly, shaky and exceptional loci	83
6. Hecke eigensheaves	89
6.1. Parabolic divisors	89
6.2. Consistent labeling	91
6.3. Parabolic Hecke data	94
6.4. The eigensheaf property	104
6.5. Abelianization	109
6.6. Linear equivalence conditions	124
7. Solving the constraints	131
7.1. Chern characters	131
7.2. Parabolic Chern characters	133

7.3. Killing the Chern classes	138
7.4. Hecke conditions	138
7.5. The class of the kernel	142
7.6. The Okamoto map	152
8. Summary	159
Appendix. TDO and the tamely ramified GLC	163
A.1. Setup for the tamely ramified GLC	163
A.2. The non-abelian Hodge theory approach	166
A.3. Twisted Deligne-Goresky-MacPherson extensions	171
A.4. Remarks on untwisting	176
A.5. Geometric class field theory revisited	178
Bibliography	181
List of notations	187
Index	189