440

ASTÉRISQUE

2023

SHEAVES AND SYMPLECTIC GEOMETRY OF COTANGENT BUNDLES

Stéphane GUILLERMOU

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 440, 2023

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
http://www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 54 € ($ 81)

Abonnement Europe : 761 €, hors Europe : 830 € ($ 1 245)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN 978-2-85629-972-2
doi:10.24033/ast.1199

Directeur de la publication : Fabien Durand

440 ASTÉRISQUE

2023

SHEAVES AND SYMPLECTIC GEOMETRY OF COTANGENT BUNDLES

Stéphane GUILLERMOU

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Stéphane Guillermou
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
2 Chemin de la Houssinière
BP 92208
F-44322 Nanes Cedex 3, France

The author is also partially supported by the ANR project MICROLOCAL (ANR-15CE40-0007-01). Part of this paper was written during a stay at UMI 3457 in Montréal (CNRS – CRM – Université de Montréal).

Texte soumis le 19 août 2019, révisé le 3 septembre 2020, accepté le 28 avril 2022.

***Mathematical Subject Classification* (2010). —** 18F20, 35A27, 53D12.
***Keywords.* —** Symplectic geometry, exact Lagrangian, microlocal sheaves, microsupport.
***Mots-clefs.* —** Géométrie symplectique, lagrangienne exacte, faisceaux microlocaux, microsupport.

SHEAVES AND SYMPLECTIC GEOMETRY OF COTANGENT BUNDLES

by Stéphane GUILLERMOU

Abstract. — The aim of this paper is to apply the microlocal theory of sheaves of Kashiwara-Schapira to the symplectic geometry of cotangent bundles, following ideas of Nadler-Zaslow and Tamarkin. We recall the main notions and results of the microlocal theory of sheaves, in particular the microsupport of sheaves. The microsupport of a sheaf F on a manifold M is a closed conic subset of the cotangent bundle T^*M which indicates in which directions we can modify a given open subset of M without modifying the cohomology of F on this subset. An important theorem of Kashiwara-Schapira says that the microsupport is coisotropic and recent works of Nadler-Zaslow and Tamarkin study in the other direction the sheaves which have for microsupport a given Lagrangian submanifold Λ, obtaining information on Λ in this way. Nadler and Zaslow made the link with the Fukaya category but Tamarkin only made use of the microlocal sheaf theory. We go on in this direction and recover several results of symplectic geometry with the help of sheaves. In particular we explain how we can recover the Gromov nonsqueezing theorem, the Gromov-Eliashberg rigidity theorem, the existence of graph selectors. We also prove a three cusps conjecture of Arnol'd about curves on the sphere. In the last sections we recover more recent results on the topology of exact Lagrangian submanifolds of cotangent bundles.

Résumé. **(Faisceaux et géométrie symplectique des fibrés cotangents)** — Le but de cet article est d'appliquer la théorie microlocale des faisceaux de Kashiwara-Schapira à la géométrie symplectique des fibrés cotangents, suivant des idées de Nadler-Zaslow et Tamarkin. Nous rappelons les notions principales de la théorie microlocale des faisceaux, en particulier le microsupport des faisceaux. Le microsupport d'un faisceau F sur une variété M est un sous-ensemble conique fermé du fibré cotangent T^*M qui indique dans quelles directions on peut modifier un ouvert donné de M sans modifier la cohomologie de F sur cet ouvert. Un théorème important de Kashiwara-Schapira dit que le microsupport est coisotrope et des travaux récents de Nadler-Zaslow et Tamarkin étudient dans l'autre sens les faisceaux qui ont pour microsupport une sous-variété lagrangienne donnée Λ, obtenant de cette façon des informations sur Λ. Nadler et Zaslow ont fait le lien avec la catégorie de Fukaya mais Tamarkin a utilisé seulement la théorie microlocale des faisceaux. Nous poursuivons dans cette direction et retrouvons plusieurs résultats de géométrie symplectique à l'aide des faisceaux. En particulier nous expliquons comment retrouver le théorème de non plongement de Gromov, le théorème de rigidité de Gromov-Eliashberg, l'existence de sélecteurs de graphes. Nous démontrons aussi une conjecture des trois cusps d'Arnol'd au sujet de courbes sur la sphère. Dans les dernières sections nous retrouvons des résultats plus récents sur la topologie des sous-variétés lagrangiennes compactes exactes des fibrés cotangents.

CONTENTS