

440

ASTÉRISQUE

2023

SHEAVES AND SYMPLECTIC GEOMETRY
OF COTANGENT BUNDLES

Stéphane GUILLERMOU

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 440, 2023

Comité de rédaction

Marie-Claude ARNAUD Alexandru OANCEA
Christophe BREUIL Nicolas RESSAYRE
Philippe EYSSIDIEUX Rémi RHODES
Colin GUILLARMOU Sylvia SERFATY
Fanny KASSEL Sug Woo SHIN
Eric MOULINES
Nicolas BURQ (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF AMS
Case 916 - Luminy P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9 Providence RI 02940
France USA
commandes@smf.emath.fr <http://www.ams.org>

Tarifs

Vente au numéro : 54 € (\$ 81)
Abonnement Europe : 761 €, hors Europe : 830 € (\$ 1 245)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2023

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN 978-2-85629-972-2
doi:10.24033/ast.1199

Directeur de la publication : Fabien Durand

440

ASTÉRISQUE

2023

**SHEAVES AND SYMPLECTIC GEOMETRY
OF COTANGENT BUNDLES**

Stéphane GUILLERMOU

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Stéphane Guillermou
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
2 Chemin de la Houssinière
BP 92208
F-44322 Nanes Cedex 3, France

The author is also partially supported by the ANR project MICROLOCAL (ANR-15CE40-0007-01). Part of this paper was written during a stay at UMI 3457 in Montréal (CNRS – CRM – Université de Montréal).

Texte soumis le 19 août 2019, révisé le 3 septembre 2020, accepté le 28 avril 2022.

Mathematical Subject Classification (2010). — 18F20, 35A27, 53D12.

Keywords. — Symplectic geometry, exact Lagrangian, microlocal sheaves, microsupport.

Mots-clefs. — Géométrie symplectique, lagrangienne exacte, faisceaux microlocaux, microsupport.

SHEAVES AND SYMPLECTIC GEOMETRY OF COTANGENT BUNDLES

by Stéphane GUILLERMOU

Abstract. — The aim of this paper is to apply the microlocal theory of sheaves of Kashiwara-Schapira to the symplectic geometry of cotangent bundles, following ideas of Nadler-Zaslow and Tamarkin. We recall the main notions and results of the microlocal theory of sheaves, in particular the microsupport of sheaves. The microsupport of a sheaf F on a manifold M is a closed conic subset of the cotangent bundle T^*M which indicates in which directions we can modify a given open subset of M without modifying the cohomology of F on this subset. An important theorem of Kashiwara-Schapira says that the microsupport is coisotropic and recent works of Nadler-Zaslow and Tamarkin study in the other direction the sheaves which have for microsupport a given Lagrangian submanifold Λ , obtaining information on Λ in this way. Nadler and Zaslow made the link with the Fukaya category but Tamarkin only made use of the microlocal sheaf theory. We go on in this direction and recover several results of symplectic geometry with the help of sheaves. In particular we explain how we can recover the Gromov nonsqueezing theorem, the Gromov-Eliashberg rigidity theorem, the existence of graph selectors. We also prove a three cusps conjecture of Arnol'd about curves on the sphere. In the last sections we recover more recent results on the topology of exact Lagrangian submanifolds of cotangent bundles.

Résumé. (Faisceaux et géométrie symplectique des fibrés cotangents) — Le but de cet article est d'appliquer la théorie microlocale des faisceaux de Kashiwara-Schapira à la géométrie symplectique des fibrés cotangents, suivant des idées de Nadler-Zaslow et Tamarkin. Nous rappelons les notions principales de la théorie microlocale des faisceaux, en particulier le microsupport des faisceaux. Le microsupport d'un faisceau F sur une variété M est un sous-ensemble conique fermé du fibré cotangent T^*M qui indique dans quelles directions on peut modifier un ouvert donné de M sans modifier la cohomologie de F sur cet ouvert. Un théorème important de Kashiwara-Schapira dit que le microsupport est coisotrope et des travaux récents de Nadler-Zaslow et Tamarkin étudient dans l'autre sens les faisceaux qui ont pour microsupport une sous-variété lagrangienne donnée Λ , obtenant de cette façon des informations sur Λ . Nadler et Zaslow ont fait le lien avec la catégorie de Fukaya mais Tamarkin a utilisé seulement la théorie microlocale des faisceaux. Nous poursuivons dans cette direction

et retrouvons plusieurs résultats de géométrie symplectique à l'aide des faisceaux. En particulier nous expliquons comment retrouver le théorème de non plongement de Gromov, le théorème de rigidité de Gromov-Eliashberg, l'existence de sélecteurs de graphes. Nous démontrons aussi une conjecture des trois cusps d'Arnol'd au sujet de courbes sur la sphère. Dans les dernières sections nous retrouvons des résultats plus récents sur la topologie des sous-variétés lagrangiennes compactes exactes des fibrés cotangents.

CONTENTS

Introduction	1
Acknowledgments	4
Part I. Microlocal theory of sheaves	5
I.1. Notations	7
I.2. Microsupport	11
I.2.1. Definition and first properties	11
I.2.2. Functorial operations	13
I.2.3. Constructibility	17
I.3. Sato's microlocalization	21
I.4. Simple sheaves	25
I.5. Composition of sheaves	29
Part II. Sheaves associated with Hamiltonian isotopies	31
II.1. Homogeneous case	33
II.2. Local behavior	37
II.3. Non homogeneous case	41
Part III. Cut-off lemmas	43
III.1. Global cut-off	45
III.2. Local cut-off—special case	53
III.3. Local cut-off—general case	59
III.4. Cut-off and γ-topology	61
III.5. Remarks on projectors—Tamarkin projector	63
Part IV. Constructible sheaves in dimension 1	67
IV.1. Gabriel's theorem	69

IV.2. Constructible sheaves on the real line	71
IV.3. Constructible sheaves on the circle	75
IV.4. Cohomological dimension 1	79
Part V. Graph selectors	81
Part VI. The Gromov nonsqueezing theorem	85
VI.1. Cut-off in fiber and space directions	87
VI.2. Nonsqueezing results	95
VI.2.1. Invariance of the displacement energy	95
VI.2.2. Nonsqueezing for a flying saucer	96
VI.2.3. Nonsqueezing for L_0	97
VI.2.4. Nonsqueezing for the ball	98
Part VII. The Gromov-Eliashberg theorem	101
VII.1. The involutivity theorem	103
VII.2. Approximation of symplectic maps	105
VII.3. Degree of a continuous map	107
VII.4. The Gromov-Eliashberg theorem	109
Part VIII. The three cusps conjecture	113
VIII.1. Examples	117
VIII.2. Simple sheaf at a generic tangent point	121
VIII.2.1. Local cohomology	121
VIII.2.2. Generic tangent point—notations and hypotheses	122
VIII.2.3. Local study around C_0	124
VIII.3. Microlocal linked points	133
VIII.4. Examples of microlocal linked points	139
VIII.5. Generic tangent point—global study	143
VIII.6. Front with one cusp	147
VIII.7. Proof of the three cusps conjecture	151
VIII.8. The four cusps conjecture	155
Part IX. Triangulated orbit categories for sheaves	161

IX.1. Definition of triangulated orbit categories	163
Quick reminder on localization	163
Definition of the orbit category	165
Internal tensor product and homomorphism	167
Morphisms in the triangulated orbit category	168
Direct sums	171
Direct and inverse images	171
IX.2. Microsupport in the triangulated orbit categories	175
IX.2.1. Definition and first properties	175
IX.2.2. Functorial behavior	177
IX.2.3. Microsupport in the zero section	178
Part X. The Kashiwara-Schapira stack	181
X.1. Definition of the Kashiwara-Schapira stack	183
Link with microlocalization	184
X.2. Simple sheaves	187
X.3. Obstruction classes	189
X.4. The Kashiwara-Schapira stack for orbit categories	191
X.5. Microlocal germs	193
X.6. Monodromy morphism	199
Part XI. Convolution and microlocalization	207
XI.1. The functor Ψ	209
XI.2. Adjunction properties	217
XI.3. Link with microlocalization	219
XI.4. Doubled sheaves	225
Part XII. Quantization	239
XII.1. Quantization for the doubled Legendrian	241
XII.2. The triangulated orbit category case	245
XII.3. Translation of the microsupport	247
XII.4. Restriction at infinity	251
Part XIII. Exact Lagrangian submanifolds in cotangent bundles	255
XIII.1. Fundamental groups	257

XIII.2. Vanishing of the Maslov class	259
XIII.3. Restriction at infinity	263
XIII.4. Vanishing of the second obstruction class	265
XIII.5. Homotopy equivalence	267
Bibliography	271