Bull. Soc. math. France
130 (1), 2002, p. 101–121

STRUCTURE DU GROUPE DE GROTHENDIECK ÉQUIVARIANT D'UNE COURBE ET MODULES GALOISIENS

PAR NIELS BORNE

RÉSUMÉ. — Cet article est consacré à l'étude de la structure d'anneau du groupe de Grothendieck équivariant d'une courbe projective munie d'une action d'un groupe fini. On explicite cette structure en introduisant un groupe de classes de cycles à coefficients dans les caractères et une notion d'auto-intersection pour ces cycles. De ce résultat, on déduit une expression de la caractéristique d'Euler équivariante d'un G-faisceau.

ABSTRACT (*Structure of the equivariant Grothendieck group of a curve and Galois modules*)

This article is devoted to the study of the ring structure of the equivariant Grothendieck group of a projective curve provided with an action of a finite group. We make this structure explicit thanks to the introduction of a group of cycle classes with coefficients in the characters and a notion of self-intersection for theses cycles. From this result, we deduce an expression for the equivariant Euler characteristic of a G-sheaf.

Table des matières

Texte reçu le 5 janvier 2001, accepté le 1er juin 2001

NIELS BORNE, Laboratoire de Mathématiques Pures de Bordeaux, Université Bordeaux I, 351, cours de la Libération, F-33405 Talence Cedex (France) • *E-mail :* borne@math.u-bordeaux.fr • *Url :* http://www.math.u-bordeaux.fr/~borne

Classification mathématique par sujets (2000). — 14H37, 14L30, 14C40.

Mots clefs. — Automorphismes des courbes, Actions de groupes sur des variétés ou des schémas, Théorèmes de Riemann-Roch.

1. Introduction

L'objet de ce travail est l'étude des modules galoisiens sur les courbes. Plus précisément, si X est une courbe projective et lisse sur un corps algébriquement clos k, munie d'une action d'un groupe fini G, et si $\mathcal{F}$ est un G-faisceau cohérent sur X, on se propose d'étudier $H^0(X,\mathcal{F})$ comme représentation de G.

Tel quel, ce problème est encore loin d'être élucidé. Par exemple, dans le cas où la théorie de la représentation est modulaire, il semble qu'on ne sache pas exprimer la classe d'isomorphisme de $H^0(X,\Omega_X)$ en fonction d'invariants de X et de l'action (c'est-à-dire les invariants codant la ramification du morphisme quotient $\pi : X \to X/G$).

Par contre, il est connu depuis le milieu des années 1980 que dans le cas d'une action dite modérée, on sait calculer la caractéristique d'Euler équivariante d'un G-faisceau cohérent $\chi(G,\mathcal{F}) = [H^0(X,\mathcal{F})] - [H^1(X,\mathcal{F})]$ dans l'anneau des caractères $R_k(G)$ du groupe G (voir [3], [10]). Toutefois, les formules explicites données par ces auteurs ne sont pas pleinement satisfaisantes : il n'est en effet pas clair en quoi elles sont un relèvement de la formule de Riemann-Roch usuelle par le morphisme de dimension $R_k(G) \to \mathbb{Z}$.

Pour remédier à ce problème, une approche naturelle est l'utilisation des propriétés fonctorielles de la K-théorie équivariante. Dans le cas d'une action triviale, la connaissance d'un isomorphisme explicite (donné par rang et déterminant) $K_0(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic} X$ et de l'isomorphisme réciproque permet de déduire la formule de Riemann-Roch usuelle. Dans le cas équivariant, le morphisme analogue n'est plus injectif. On surmonte cette difficulté en introduisant un groupe de cycles à coefficients équivariants, noté $A_0(G,X)$, se surjectant dans $\mathrm{Pic}_G X$. On définit de plus un morphisme naturel $\mathbb{Z} \oplus A_0(G,X) \to K_0(G,X)$ qui est en fait un isomorphime de groupes (voir le théorème 3.12). Ce résultat permet de définir une classe de Chern pour laquelle la formule de Riemann-Roch usuelle est valable dans le cadre équivariant.

En munissant $A_0(G,X)$ d'une structure d'anneau convenable, dont le produit est défini en termes d'auto-intersection de 0-cycles, on montre que l'isomorphisme ci-dessus peut se lire comme un isomorphisme d'anneaux unitaires (voir le théorème 4.10). De cette description, on déduit qu'un certain faisceau qu'on baptise ici *faisceau canonique* $\mathcal{C}_X := \Omega_X \oplus \Omega_X^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \Omega_X^{\otimes \# G}$ possède une caractéristique d'Euler équivariante particulièrement simple. En effet, lorsque l'action est modérée, on a :

$$\chi(G,\mathcal{C}_X) = \#G \ \chi(\Omega_X)[k[G]]$$

(voir théorème 4.13).

Je tiens à remercier Boas Erez qui, en relisant cet article, m'a aidé à l'améliorer.

2. Notations et conventions

Dans tout ce qui suit, G désigne un groupe fini et k un corps algébriquement clos.

2.1. *G*-courbe.

— On appelle G-schéma tout schéma X muni d'une action de G. Plus précisément un G-schéma est un couple (X, ϕ) où $\phi : G \to \operatorname{Aut} X$ est un morphisme de groupes. Lorsque, comme dans la plupart des cas, il n'y a pas d'ambiguïté, on omet de noter le morphisme ϕ.

Une G-courbe X sur k est un G-schéma dont le schéma sous-jacent est une courbe algébrique projective et lisse sur k, au sens par exemple de [5], ch. IV. Par commodité, et bien que ça ne soit pas indispensable, on supposera que l'action est fidèle et fixe le corps k. La G-courbe X admet un quotient dans la catégorie des schémas qu'on notera $\pi : X \to Y = X/G$. Le schéma Y est en fait également une courbe projective et lisse sur k, le morphisme π est fini, et l'extension des corps de fonctions associée est galoisienne de groupe de Galois G.

2.2. *G*-faisceaux.

— Soit X un G-schéma.

Définition 2.1. — Soit $\mathcal{F}$ un faisceau (d'ensembles, de groupes,...) sur X. On appelle *G-linéarisation* de $\mathcal{F}$ la donnée d'une collection $(\psi_g)_{g\in G}$ de morphismes de faisceaux (d'ensembles, de groupes,...) $\psi_g : g_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\psi_1 = \mathrm{Id}$;
2) $\psi_{hg} = \psi_h \circ h_*(\psi_g)$ (condition de cocycle) ; autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} h_*g_*\mathcal{F} \arrow[r, "h_*\psi_g"] \arrow[d, equal] & h_*\mathcal{F} \arrow[r, "\psi_h"] & \mathcal{F} \\ (hg)_*\mathcal{F} \arrow[urr, "\psi_{hg}"'] & & \end{tikzcd}$$

Un *G-faisceau sur X* est un faisceau muni d'une G-linéarisation.

Définition 2.2. — Pour tout G-schéma X, on notera $\mathrm{Coh}(G, X)$ la catégorie dont les objets sont les G-faisceaux cohérents sur X, et les morphismes les morphismes de G-faisceaux.

Définition 2.3. — Le *groupe de Picard équivariant* de X, noté $\mathrm{Pic}_G X$, est le groupe des classes de G-isomorphismes de G-faisceaux inversibles sur X, muni du produit induit par le produit tensoriel.

2.3. Groupes de Grothendieck équivariants

2.3.1. Les groupes G_0 et K_0

DÉFINITION 2.4. — Soit X un G-schéma noethérien. On désigne par $G_0(G,X)$ (resp. $K_0(G,X)$) le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes $[\mathcal{F}]$ de G-faisceaux cohérents (resp. de G-faisceaux localement libres de rang fini) sur X, modulo les relations $[\mathcal{F}] = [\mathcal{F}'] + [\mathcal{F}'']$ s'il existe une suite exacte de G-faisceaux

$$0 \to \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \to 0.$$

Par exemple le groupe $G_0(G, \operatorname{Spec} k)$ est le groupe de Grothendieck des $k[G]$-modules de type fini. On le notera $R_k(G)$. Il est connu (voir [12]) que ce groupe s'identifie au groupe des caractères de Brauer de G.

Le groupe $K_0(G,X)$ est de plus muni naturellement d'une multiplication induite par le produit tensoriel des faisceaux, qui en fait un anneau commutatif unitaire.

Comme on le rappelle au moment de l'étude de cette structure, les deux groupes $G_0(G,X)$ et $K_0(G,X)$ coïncident lorsque le G-schéma considéré est séparé et régulier. Dans le cas des G-courbes étudiées ici, cela nous permettra de parler sans ambiguïté du groupe de Grothendieck équivariant de la courbe considérée.

On renvoie à [13] pour la définition des groupes de K-théorie équivariante supérieurs, et pour la démonstration de leur propriétés fondamentales. On les notera $G_n(G,X)$ (resp. $K_n(G,X)$).

2.3.2. Fonctorialité. — Le foncteur $G_0(G,\cdot)$ (resp. $K_0(G,\cdot)$) est naturellement contravariant par rapport aux G-morphismes plats (resp. arbitraires) de G-schémas noethériens. De plus tout G-morphisme propre

$$f : X \longrightarrow Y$$

de G-schémas noethériens induit un morphisme de groupes

$$f_* : G_0(G,X) \to G_0(G,Y)$$

défini par la formule

$$f_*\bigl([\mathcal{F}]\bigr) = \sum_n (-1)^n \bigl[R^n f_*(\mathcal{F})\bigr].$$

En particulier, lorsque X est une G-variété projective sur k, le morphisme structurel induit un morphisme $G_0(G,X) \to R_k(G)$ qu'on appelera caractéristique d'Euler équivariante, et qu'on notera $\chi(G,\cdot)$.

2.3.3. Formule de projection

PROPOSITION 2.5. — *Soit $f : X \to Y$ un G-morphisme propre de G-schémas noethériens, $x \in G_0(G,X)$, $y \in K_0(G,Y)$. On a alors :*

$$f_*\bigl(x f^*(y)\bigr) = f_*(x) y.$$

Démonstration. — La preuve classique (par exemple [1]) s'adapte au cas équivariant. □

3. Structure additive

Pour tout le reste de ce travail, à l'exception du paragraphe 3.2.2, on supposera que X est une G-courbe.

3.1. Groupe de classes de cycles à coefficients équivariants

3.1.1. G-cycles

DÉFINITION 3.1. — On appelle *G-cycle* sur X toute somme formelle de points fermés de X du type

$$D = \sum_{P \in X} V_P \cdot P$$

vérifiant :

1) V_P est un caractère de Brauer du groupe d'inertie G_P de P (c'est-à-dire $V_P \in R_k(G_P)$), nul sauf pour un nombre fini de points ;
2) si $P' = gP$ pour $g \in G$, alors les caractères V_P et $V_{P'}$ sont conjugués (ce qu'on notera $V_{P'} = V_P^g$).

On dira que D est de plus *effectif* si tous les caractères V_P sont des caractères de représentations des G_P. On notera $Z_0(G, X)$ le groupe abélien des G-cycles sur X.

REMARQUE 3.2. — D'une manière plus formelle, on a un isomorphisme canonique

$$Z_0(G, X) \simeq \varinjlim_{S} G_0(G, S)$$

où S varie parmi toutes les G-sous-variétés (fermées réduites) strictes de X.

DÉFINITION 3.3. — On appellera *G-degré* et on notera

$$\deg_G : Z_0(G, X) \longrightarrow R_k(G)$$

le morphisme limite inductive des morphismes images directes $G_0(G, S) \to R_k(G)$ induits par les morphismes structurels $S \to \operatorname{Spec} k$, S variant parmi toutes les G-sous-variétés fermées strictes de X.

3.1.2. Classe de G_0-théorie associée à un G-cycle. — On définit un morphisme

$$\gamma : Z_0(G, X) \longrightarrow G_0(G, X)$$

de la manière suivante : si D est un G-cycle à support dans S, $\gamma(D)$ est l'image de D par le morphisme image directe $G_0(G, S) \to G_0(G, X)$ induit par l'immersion fermée $S \to X$.