Bull. Soc. math. France
131 (1), 2003, p. 59–121

CLASSES DE CHERN ET CLASSES DE CYCLES EN COHOMOLOGIE RIGIDE

PAR DENIS PETREQUIN

RÉSUMÉ. — Nous construisons dans cet article les classes de Chern et les classes de cycles en cohomologie rigide. Nous démontrons par la suite que ces constructions vérifient bien les propriétés attendues. La cohomologie rigide est donc une cohomologie de Weil.

ABSTRACT (*Chern classes and cycle classes in rigid cohomology*)

We define in this article Chern classes and cycle classes in rigid cohomology. Then we prove that these constructions verify the expected properties. The rigid cohomology is a Weil cohomology.

Table des matières

Texte reçu le 25 septembre 2001, accepté le 20 mars 2002

DENIS PETREQUIN, IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex (France)
E-mail : petrus@maths.univ-rennes1.fr • *Url :* www.maths.univ-rennes1.fr/~petrus

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F30.

Mots clefs. — Cohomologie rigide, cohomologie cristalline, classes de cycles, classes de Chern.

Cet article a bénéficié du support des réseaux européens TMR (n° ERBFMRXCT-960006) et IHP (n° HPRN-CT2000-00120).

Introduction

La cohomologie rigide, introduite par Berthelot [2], est une théorie cohomologique p-adique : c'est une généralisation de la cohomologie de Monsky-Washnitzer [26] et de la cohomologie cristalline [1]. Berthelot a démontré qu'elle vérifiait la propriété de finitude pour les variétés lisses ou propres [7], ainsi que la dualité de Poincaré et la formule de Künneth [6] ; le théorème de finitude a ensuite été étendu aux variétés quelconques par Grosse-Klönne [17]. Dans cet article, nous étudions les classes de Chern et les classes de cycles. Nous obtenons que la cohomologie rigide satisfait à tous les axiomes des cohomologies de Weil.

La cohomologie rigide est la cohomologie du complexe de de Rham surconvergent du tube d'une compactification de la variété. La première classe de Chern d'un faisceau inversible est construite à l'aide de cocycles de Čech à valeur dans ce complexe de de Rham surconvergent. Ce cocycle est calculé à l'aide de relèvements d'un cocycle représentant le faisceau inversible dont on est parti. On peut alors construire les classes de Chern de manière classique en utilisant [18]. Cependant, on ne dispose pas en cohomologie rigide de morphismes d'image directe en toute généralité. On ne peut donc pas directement utiliser la méthode de [18] pour démontrer l'additivité des classes de Chern définies précédemment. On veut utiliser la méthode qui consiste à se ramener à un cas universel en considérant un topos classifiant [8]. Cependant, il semble difficile de définir la cohomologie rigide d'un topos classifiant en utilisant la définition basée sur des plongements. Après s'être ramené au cas des variétés propres, nous utiliserons une définition de la cohomologie rigide basée sur les topos cristallin de niveau m. Nous réinterprétons alors le calcul à base de cocycle précédant de manière cristalline ce qui permet de le généraliser au cas des variétés simpliciales. On achève la démonstration de l'additivité en suivant [8]. Nous en profitons pour construire des classes de Chern à valeurs dans la cohomologie cristalline de niveau m. Pour les classes de cycles, le morphisme trace peut-être vu comme un élément de l'homologie rigide — dual de la cohomologie rigide à support compact. On appelle cet élément la classe fondamentale. Les classes de cycles se définissent alors par fonctorialité et linéarité. On montre alors que cela correspond à l'image de 1 par le morphisme de Gysin, ce qui permet de prouver que si D est un diviseur d'une variété lisse, la classe ainsi définie est égale à la classe du pseudo-diviseur associé à D. On en déduit la compatibilité des classes de cycles à l'équivalence rationnelle.

Précisons les différentes parties de l'article.

Nous commencerons par un chapitre préliminaire, dans lequel on trouvera des rappels sur la définition de la cohomologie rigide ainsi que sur ses propriétés. Nous en profiterons pour faire aussi quelques rappels sur les cycles et leurs intersections, en particulier pour les variétés singulières.

Dans la deuxième partie, nous définirons l'homologie rigide (les classes de cycles se définissent naturellement dans l'homologie et non la cohomologie si on s'intéresse à des variétés singulières). Nous montrerons alors comment on peut, à partir des propriétés de la cohomologie rigide, montrer que l'on a un formalisme de théorie de dualité de Poincaré au sens de Bloch-Ogus [10] : nous exhiberons la construction de la classe fondamentale d'une variété intègre qui sera la base de la définition des classes de cycles. Toutes les constructions de cette partie sont formelles.

Dans la troisième partie, nous construirons, par un calcul de cocycles, la classe de cohomologie associée à un pseudo-diviseur. On commencera par traiter le cas des variétés propres pour s'intéresser par la suite aux variétés ouvertes. C'est cette construction qui est le cœur de cet article.

Dans la partie 4, nous définirons la première classe de Chern d'un fibré inversible comme un cas particulier de la classe de cohomologie d'un pseudo-diviseur. Nous construirons alors les classes de Chern en suivant la méthode de Grothendieck [20]. Pour ce faire nous aurons besoin du calcul de la cohomologie rigide d'un fibré projectif relatif. Les classes de Chern ainsi construites sont fonctorielles et normalisées. Cependant on ne peut pas appliquer directement les méthodes classiques pour démontrer l'additivité des classes de Chern.

Dans la cinquième partie, nous réinterpréterons, pour les variétés propres, la cohomologie rigide comme une cohomologie cristalline limite. Précisément nous introduirons le topos limite inductive des topos cristallins de niveau m. Dans ce dernier nous pouvons définir des classes de Chern et vérifier l'additivité. Un théorème de comparaison avec le cas rigide nous permet alors de finir l'étude des classes de Chern rigides. Nous définirons aussi les classes de Chern dans chaque topos cristallin de niveau m.

Pour finir, nous démontrerons une comparaison entre la classe d'un pseudo-diviseur et la classe d'un cycle. Cela nous permettra alors de montrer que les classes de cycles sont compatibles à l'équivalence rationnelle. On peut alors montrer la compatibilité des classes de cycles aux intersections. On conclura en énonçant un théorème de Riemann-Roch, la formule de self-intersection, le calcul de la cohomologie d'un éclaté et de l'action du Frobenius sur les classes de cycles. Ces propriétés se déduisent des théorèmes analogues sur les groupes de Chow.

Cet article est tiré de ma thèse de doctorat [30].

Remerciements. — Je tiens à remercier P. Berthelot pour tous les conseils qu'il m'a prodigués tout au long de ma thèse et de la rédaction de cet article. Je tiens aussi à remercier le rapporteur qui m'a indiqué la notion de pseudo-diviseur permettant d'unifier et de clarifier les constructions traitées dans cet article.

NOTATION. — Tout au long de cet article, k désignera un corps de caractéristique $p > 0$. On appelera k-variété un schéma séparé de type fini sur $\mathrm{Spec}(k)$.

1. Rappel et notations

1.1. Cohomologie rigide. — Cette partie rappelle les définitions et les propriétés de la cohomologie rigide. Tout ce qui s'y trouve est issu des articles de Berthelot sur le sujet [2], [4], [6], [7].

Rappelons pour commencer la construction de la cohomologie rigide [7]. Soient X une k-variété, Z un sous-schéma fermé de X et $U = X - Z$. Il existe d'après Nagata [27], une variété propre $\overline{X}$ et une immersion ouverte $j_X : X \hookrightarrow \overline{X}$ (on notera $j_U : U \hookrightarrow \overline{X}$). Soit $\mathscr{V}$ un anneau de valuation discrète, de corps résiduel k et de corps des fractions K. On suppose alors qu'il existe une immersion fermée $\overline{X} \hookrightarrow \mathscr{Y}$ dans un schéma formel $\mathscr{Y}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathscr{V})$ lisse au voisinage de X — cette condition technique peut être supprimée en utilisant des résolutions de Čech, nous la garderons pour simplifier le propos. On considère la fibre générique rigide Y de $\mathscr{Y}$ [32] et on note $\mathrm{sp} : \mathsf{Y} \to \mathscr{Y}$ le morphisme de spécialisation. Rappelons [4, 1.1] si on note $\mathscr{Y}_0$ la réduction de $\mathscr{Y}$ sur k, on appelle, pour tout sous-k-schéma T de $\mathscr{Y}_0$, *tube de* T et on note $]T[$ le sous-ensemble $\mathrm{sp}^{-1}(T)$ des points de Y qui se spécialisent dans T.

Avec les notations précédentes, on appelle voisinage strict [4, 1.2] de $]X[$ dans $]\overline{X}[$, tout ouvert V de $]\overline{X}[$ tel que le recouvrement $(V,]\overline{X} - X[)$ soit admissible. Dès lors, pour tout faisceau $\mathscr{E}$ sur $]\overline{X}[$, on note

$$j^\dagger \mathscr{E} := \varinjlim_{V} \alpha_{V*}\alpha_V^* \mathscr{E},$$

où la limite inductive est prise sur tous les voisinages stricts de $]X[$ dans $]\overline{X}[$ et α_V désigne l'inclusion $V \hookrightarrow]\overline{X}[$. On définit de même $j_U^\dagger$.

On regarde alors le complexe simple associé au complexe double

$$\big(j_X^\dagger \Omega^\star_{]\overline{X}[} \longrightarrow j_U^\dagger \Omega^\star_{]\overline{X}[}\big)_s$$

où le terme de bidegré $(0,0)$ est $j_X^\dagger \mathscr{O}_{]\overline{X}[}$. La différentielle

$$\mathrm{d} : j_X^\dagger \Omega^i_{]\overline{X}[} \oplus j_U^\dagger \Omega^{i-1}_{]\overline{X}[} \longrightarrow j_X^\dagger \Omega^{i+1}_{]\overline{X}[} \oplus j_U^\dagger \Omega^{i}_{]\overline{X}[}$$

est donnée par

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}_X & 0 \\ r & -\mathrm{d}_U \end{pmatrix}, \tag{1}$$

où r est la restriction et

$$\mathrm{d}_X : j_X^\dagger \Omega^{i-1}_{]\overline{X}[} \longrightarrow j_X^\dagger \Omega^{i}_{]\overline{X}[} \quad \big(\text{resp. } \mathrm{d}_U : j_U^\dagger \Omega^{i-1}_{]\overline{X}[} \longrightarrow j_U^\dagger \Omega^{i}_{]\overline{X}[}\big)$$

est obtenue en appliquant à d le foncteur $j_X^\dagger$ (resp. $j_U^\dagger$). Berthelot [7] montre alors que les groupes de cohomologie

$$\mathbb{H}^i\big(]\overline{X}[, (j_X^\dagger\Omega^\star_{]X[} \to j_U^\dagger\Omega^\star_{]X[})_s\big)$$

ne dépendent pas des choix faits.

On définit alors les groupes de cohomologie rigide de X à support dans Z par

$$H^i_{Z,\mathrm{rig}}(X/K) := \mathbb{H}^i\big(\,]\overline{X}[, (j_X^\dagger\Omega^\star_{]\overline{X}[} \to j_U^\dagger\Omega^\star_{]\overline{X}[})_s\big).$$

En prenant $Z = X$, on trouve la cohomologie rigide

$$H^i_{\mathrm{rig}}(X/K) := \mathbb{H}^i\big(\,]\overline{X}[, j_X^\dagger\Omega^\star_{]\overline{X}[}\big).$$

NOTATION. — Nous noterons

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}\big((X,\overline{X})/K\big) := \mathbb{R}\mathrm{sp}_* j_X^\dagger\Omega^\star_{]\overline{X}[}$$

vu comme élément de la catégorie dérivée des K-vectoriels sur $\overline{X}$. Par abus, nous omettrons le $\overline{X}$ dans la notation ci-dessus.

Énonçons quelques propriétés classiques. Si on se donne X (resp. Y), Z un fermé de X (resp. T un fermé de Y) et un morphisme $f : X \to Y$ tel que $f^{-1}(T) \subset Z$, il existe un morphisme de fonctorialité contravariante

$$f^* : H^i_{T,\mathrm{rig}}(Y/K) \longrightarrow H^i_{Z,\mathrm{rig}}(X/K).$$

Il existe aussi un cup-produit

$$H^i_{\mathrm{rig}}(X) \otimes H^j_{Z,\mathrm{rig}}(X) \xrightarrow{\;\cup\;} H^{i+j}_{Z,\mathrm{rig}}(X).$$

De plus les morphismes de fonctorialités sont compatibles aux cup-produits.

Il est aussi direct de vérifier que la cohomologie d'une somme disjointe est la somme directe des cohomologies.

Il existe aussi (voir [2]) une notion de cohomologie rigide à support compact, notée $H^*_{c,\mathrm{rig}}(X/K)$, qui est covariante par rapport aux immersions ouvertes et contravariante par rapport aux morphismes propres.

Rappelons maintenant les principales propriétés de la cohomologie rigide. On trouvera les démonstrations dans [7], [6] et [17].

THÉORÈME 1.1 (Berthelot). — *Avec les notations précédentes, on a les propriétés suivantes :*

- *Pour tout k-variété X, $H^i_{\mathrm{rig}}(X/K)$ et $H^i_{c,\mathrm{rig}}(X/K)$ sont de dimension finie.*
- *Si X est équidimensionnelle de dimension n,*

$$H^i_{\mathrm{rig}}(X/K) = 0 \quad \textit{et} \quad H^i_{c,\mathrm{rig}}(X/K) = 0 \ \textit{pour}\ i \notin [0, 2n].$$

- *Si on suppose que X est lisse et si Z est un sous-schéma fermé de codimension r, on a pour tout $i < 2r$*

$$H^i_{Z,\mathrm{rig}}(X/K) = 0.$$