COURS SPÉCIALISÉS

COLLECTION SMF

Leçons sur l'homologie et le groupe fondamental

Pierre GUILLOT

29

LEÇONS SUR L'HOMOLOGIE ET LE GROUPE FONDAMENTAL

Pierre Guillot

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
`commandes@smf.emath.fr`	`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 60 € ($ 90)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`cours_specialises@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-965-4

Directeur de la publication : Fabien DURAND

COURS SPÉCIALISÉS 29

LEÇONS SUR L'HOMOLOGIE ET LE GROUPE FONDAMENTAL

Pierre Guillot

Société Mathématique de France 2022

à Suzelle

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Les objets au cœur de ce livre sont les groupes $H_n(X)$, pour $n \geq 0$, que l'on peut associer à chaque espace topologique X. On les appelle les groupes *d'homologie*. Leur propriété fondamentale est d'être des « invariants », c'est-à-dire que si X et Y sont deux espaces topologiques homéomorphes, alors $H_n(X)$ et $H_n(Y)$ sont des groupes isomorphes. La même conclusion peut d'ailleurs se tirer en supposant seulement que X et Y ont le même *type d'homotopie*, ce qui signifie essentiellement que l'on peut passer de X à Y par des déformations progressives.

Les applications sont nombreuses, et apportent des réponses à certaines questions tout à fait élémentaires : est-ce que $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ peuvent être homéomorphes avec $n \neq m$? Que dire des sphères S^n et S^m ? Une sphère de dimension 2 est-elle homéomorphe à un tore ? Nous montrerons que les réponses à toutes ces questions sont négatives. Mais nous obtiendrons aussi des résultats plus « positifs », comme : toute application continue d'une boule vers elle-même possède un point fixe (théorème de Brouwer), tout champ de vecteurs sur la sphère S^2 doit s'annuler (théorème de la boule chevelue), pour toute action d'un groupe fini G sur $\mathbf{R}^d$, il existe un $g \in G$ non trivial qui possède un point fixe, etc.

Il existe plusieurs façons de définir les groupes d'homologie, et en dehors de la définition, plusieurs façons de les calculer, que nous allons toutes aborder. Le tour d'horizon commence avec les complexes simpliciaux (c'est-à-dire en gros les triangulations) et se termine avec les formes différentielles, et le difficile théorème de de Rham.

La théorie de l'homologie présente une difficulté qui est nouvelle pour la plupart des étudiants. Certes, le calcul des groupes $H_n(X)$ peut être parfois très facile selon les informations que l'on a sur X – par exemple, si X est triangulé, tout se ramène à un algorithme que l'on peut confier à un ordinateur. On pourrait alors penser que la théorie s'expose aisément en s'appuyant sur les exemples les plus abordables. Malheureusement, et c'est la nouveauté, il est très difficile de montrer que ces groupes sont bien définis. En d'autres termes, il est difficile de montrer *à la fois* qu'on peut définir des groupes $H_n(X)$ qui sont bel et bien des invariants, et que les méthodes élémentaires type triangulations produisent les bons résultats. (Par exemple, deux triangulations différentes de X donnent deux méthodes de calcul de l'homologie, et il n'est pas trivial du tout que les deux calculs mènent au même résultat.)

Pour compliquer le tout, l'idée même d'invariant n'est pas si simple à saisir, puisque – si l'on veut l'aborder avec le plus de profit – elle mène aux catégories et aux foncteurs, et à bien d'autres préliminaires. Finalement, il va falloir beaucoup de patience avant d'arriver aux objets de base. Afin de pouvoir présenter des applications rapidement, et aussi parce que c'est un autre classique de la topologie algébrique, nous commencerons dans ce livre avec l'étude du *groupe fondamental* $\pi_1(X)$. C'est également un groupe attaché à X, mais la situation est assez différente : il faut relativement peu d'explications pour se convaincre qu'il est bien défini, que c'est bien un invariant d'homotopie, et si le calcul de $\pi_1(X)$ est dans la majorité des cas très difficile (beaucoup plus que celui de l'homologie), il existe heureusement une poignée d'exemples faisables directement à partir de la définition, et qui permettent de jolies applications. Ajoutons que le groupe $H_1(X)$ peut être décrit facilement à partir de $\pi_1(X)$, et ainsi la première partie du livre propose finalement elle aussi un angle d'attaque de l'homologie.

Je précise que ce livre rassemble des notes de cours ayant été donnés à des périodes diverses et à des publics divers : cours de M2 en 2009 sur l'homologie singulière (chapitres 10, 11, 12, 13), cours de M2 en 2012 sur les faisceaux (chapitres 14, 15, 16 notamment), cours de M1 en 2019 et 2020 sur le groupe fondamental (chapitres 1, 3, 4, 5), cours de M2 en 2019 (ajout des chapitres 7 et 8). Les autres chapitres (2, 6, 9) ont été rédigés *a posteriori*, et l'exposition a été unifiée autant que possible. Il résulte de cette genèse que, malgré ce que le nombre de pages pourrait laisser penser, nous n'avons jamais cherché à être exhaustif : dans un cours donné à l'université, on manque toujours de temps pour inclure ce que l'on souhaite, et on s'apercevra (sans s'étonner) de nombreuses omissions tout à fait arbitraires dans le texte. Je suis moi-même surpris de voir que, ayant développé assez d'algèbre homologique pour démontrer le théorème de de Rham, on n'a finalement pas inclus de preuve du théorème des coefficients universels, mais c'est ainsi. Et ce n'est qu'un exemple. Pour les mêmes raisons, les exercices inclus à la fin des chapitres reflètent ce qu'on a eu le temps de traiter dans les séances de TD, et ne sauraient représenter un tour d'horizon de tous les développements imaginables.

On trouve de nombreux livres sur la topologie algébrique. Une tradition assez bien établie veut que chaque exposition de ce sujet complexe laisse le lecteur compléter lui-même certaines démonstrations, afin d'éviter une explosion du nombre de pages. Chaque auteur se sent alors facilement légitimé dans sa volonté d'écrire son propre traité, qui détaillerait soigneusement « ce qui compte vraiment », tout en laissant de côté ce qui relève authentiquement du « détail technique ». C'est parfois la seule confiance qu'on accorde à l'auteur qui pousse à ouvrir un ouvrage plutôt qu'un autre. Je vais toutefois essayer de décrire ce qui fait, selon moi, la singularité du présent volume.

Commençons par le fait que le livre est adapté aux étudiants en M1, y compris ceux dont le cursus en L3 n'allait pas plus loin que les espaces métriques : nous commençons par définir les espaces topologiques. Il n'était pas question, avec un tel public, qui par ailleurs considère souvent la topologie comme un outil pour l'analyse, de se lancer dès les premières pages dans des arguments « visuels », de créer de nouveaux espaces en faisant des recollements ou des écrasements. Les outils basiques comme la topologie quotient sont développés entièrement, notamment dans le chapitre 2. En outre, afin de pouvoir faire profiter les étudiants de certains chapitres avec un minimum de prérequis, on donne dans le chapitre 1 des définitions des espaces classiques (tore, bouteille de Klein, ruban de Moebius, plan projectif réel) comme des espaces métriques, obtenu par passage au quotient sous l'action d'un groupe. En fait les 9 premiers chapitres, à l'exception du chapitre 2 et de certains passages du chapitre 6, peuvent être lus et appréciés même si on ne connaît pas d'autres espaces que les espaces métriques.

Une autre orientation générale volontairement suivie : le choix de présenter les concepts qui seront utiles non seulement aux étudiants qui souhaitent se spécialiser en topologie algébrique, mais aussi à certains autres. Par exemple, en géométrie algébrique « moderne », on rencontre des groupes de (co)homologie, des faisceaux, et même un avatar du groupe fondamental, de manière routinière. Par contre, les fibrations, cofibrations, opérations de Steenrod, groupes d'homotopie supérieurs, m'ont paru trop spécialisés, et j'ai préféré inclure le théorème de de Rham.

Après ces notes d'intention, rentrons maintenant un peu dans les détails. Les paragraphes suivants sont à l'intention des enseignants, ou peut-être des étudiants ayant déjà une vue d'ensemble, même vague, du sujet.

Tous les cours sur le groupe fondamental incluent la classification des revêtements. Tout le monde semble savoir qu'on peut en fait énoncer plus finement une équivalence de catégories entre revêtements et $\pi_1(X)$-ensembles, mais il est très rare de trouver une démonstration complète (la seule référence que je connaisse est [**7**]). De la même manière, il semble universellement connu que cette équivalence de catégories permet une jolie démonstration du théorème de Van Kampen qui remplace la désagréable bidouille à laquelle on est contraint si on essaie d'argumenter directement, mais on trouve rarement plus qu'une esquisse très vague de démonstration. Nous avons décidé d'inclure tout ceci dans la première partie, avec autant de précision que possible.

Dans la deuxième partie, nous avons abordé l'homologie par les complexes simpliciaux. De nos jours, on peut demander à un ordinateur de calculer les groupes d'homologie d'un tel complexe, et avec le logiciel Sage c'est un jeu d'enfant. Nous avons inclus plusieurs exemples d'interaction avec la machine ; ils permettent à peu de frais de montrer des complexes avec des groupes différents. Nous avons donné une importance peut-être inhabituelle aux posets. Ceux-ci permettent de construire des homotopies simpliciales très facilement, et on en déduit le calcul de l'homologie du simplexe Δ^n et de la sphère $\mathbb{S}^n$. Ensuite, nous insistons sur les axiomes d'Eilenberg et Steenrod, en essayant de minimiser l'importance de la définition particulière de l'homologie singulière. (Nous démontrons tout de même les axiomes pour celle-ci, sauf celui d'excision, pour lequel le temps nous manquait, et on renvoie à [**16**].) Afin de ne pas abuser de l'algèbre homologique dans cette partie, nous proposons un théorème de Künneth dans le cas des corps, et un théorème des coefficients universels dans le cas d'une extension « plate », tous deux restreints aux CW-complexes, car ces variantes peuvent se démontrer très facilement. Le temps commençait également à manquer pour la discussion de la dualité de Poincaré, mais nous donnons néanmoins une esquisse assez fouillée de la preuve de Milnor et Stasheff [**14**].

Dans la troisième partie, l'algèbre homologique prend sa revanche, et revient au centre des débats. On présente les foncteurs dérivés, avec d'abord l'exemple de *Tor* et de l'homologie des groupes, ce qui permet de montrer qu'un groupe fini ne peut agir librement sur une variété contractile. On ne rentre pas dans le vocabulaire des catégories abéliennes, mais l'on indique en quelques mots de quoi il retourne – juste de quoi convaincre le lecteur que l'on peut faire avec les faisceaux, dans le dernier chapitre, la même chose qu'avec les modules, les démonstrations étant formellement les mêmes. La démonstration du théorème de de Rham, avec les étapes intermédiaires telle l'existence des faisceaux injectifs, est complète à l'exception d'un « détail technique » pour lequel on renvoie à [**18**]. Précisons que dans cette dernière partie, on suppose soudainement que le lecteur connaît les variétés différentiables (et d'autres choses comme par exemple les produits tensoriels sur un anneau commutatif ou au moins un corps). C'est assez raisonnable, par expérience, car les élèves de M2 (ou les jeunes doctorants) qui pousseront jusqu'aux derniers chapitres auront suivi d'autres cours sur ces sujets, à n'en pas douter. Les arguments dans la troisième partie sont *beaucoup* plus rapides, les élèves ayant un peu vieilli dans l'intervalle. (Comparer le premier et le dernier chapitre de ce livre est assez amusant, et illustre bien le passage du temps.)

Pour finir, je voudrais remercier Olivier Guichard pour avoir suggéré la publication de ces notes de cours et m'avoir mis en contact avec la SMF, et également pour avoir établi une liste impressionnante de corrections. Certaines démonstrations ont aussi bénéficié des suggestions avisées d'un rapporteur anonyme, qui peut être assuré de ma gratitude. Mes remerciements sont également adressés à Julie Deserti pour son travail éditorial, et notamment pour avoir su tolérer le retard causé par un heureux événement.

Pierre Guillot
Strasbourg, janvier 2022