Astérisque

PIERRE CARTIER

La théorie classique et moderne des fonctions symétriques

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 597, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__1_0>

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n° 597 Novembre 1982

LA THÉORIE CLASSIQUE ET MODERNE DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

par Pierre CARTIER

Introduction

La combinatoire est en gros l'étude des géométries finies. Une partie est consacrée à la construction et à l'étude qualitative des configurations finies (graphes, plans projectifs, matroïdes, et plus récemment immeubles....). D'un autre côté, on s'occupe à compter les objets d'une certaine espèce, le plus souvent au moyen de séries génératrices; inversement, et cette préoccupation est plus récente, on s'efforce d'interpréter des identités entre polynômes et séries de puissances en introduisant les structures finies que comptent les coefficients.

La partie la plus vénérable de la combinatoire s'occupe des propriétés des permutations (avec ou sans répétitions) et des fonctions symétriques; les tableaux de Young y jouent un rôle prédominant. Il s'agit d'un retour aux traditions de l'Algèbre du siècle dernier, mais enrichi par tout l'arsenal des notions modernes. On met l'accent sur les méthodes constructives et algorithmiques; les points de contact avec le reste des Mathématiques sont nombreux, et en particulier avec la théorie des groupes, la géométrie algébrique, la topologie des classes caractéristiques, et aussi la physique mathématique. De plus, les problèmes et les méthodes de l'informatique théorique jouent un rôle croissant.

Les mathématiciens anglais se sont toujours intéressés à ces problèmes, dans la grande tradition de MacMahon et Young; une autre école s'est formée autour de Rota au M.I.T., à la recherche de méthodes synthétiques et de nouvelles structures; en France, les disciples de Schützenberger, particulièrement nombreux à Strasbourg, s'intéressent surtout au calcul des séries.

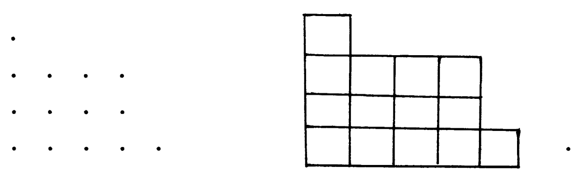
Le but de cet exposé est d'indiquer un certain nombre de lignes de recherche, et leurs applications. Par nécessité, nous devrons omettre l'essentiel des calculs et des démonstrations. Je remercie Foata et Lascoux pour leurs informations sur un sujet qu'ils connaissent à fond.

§ 1. Partages et q-dénombrements

1.1. Soit n un entier positif (0 est compté comme positif!). Un partage de n est une suite $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_m)$ d'entiers satisfaisant à la relation $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_m > 0$ et telle que n soit égal à la somme des μ_i ; on écrit aussi $\mu \vdash n$ le fait que μ est un partage de n , et l'on dit que m est le nombre de parts de μ . Il est commode d'introduire une suite d'indéterminées h_n (pour $n \geq 1$), et de convenir que h_n a le poids n pour tout $n \geq 1$; on pose alors $h_\mu = h_{\mu_1}\ldots h_{\mu_m}$, de sorte que l'application $\mu \mapsto h_\mu$ est une bijection de l'ensemble des partages de n sur l'ensemble des monômes de poids n en les indéterminées h_i . On écrit aussi μ sous la forme $1^{r_1}\ldots n^{r_n}$ lorsque μ contient exactement r_i parts égales à i ; on a alors $h_\mu = h_1^{r_1}\ldots h_n^{r_n}$.

A un partage μ de l'entier positif n est associé un ensemble $D(\mu)$ de n points, connu sous le nom de diagramme de Ferrers: si $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_m)$, cet ensemble se compose des couples (i,j) d'entiers tels que $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq i \leq \mu_j$; il est composé de m lignes de longueurs $\mu_1,\ldots,\mu_m$, la plus haute étant la plus courte. On peut aussi considérer un ensemble correspondant de cases. Au partage μ de n on associe le partage dual μ^* de n , où μ^*_i est le nombre de parts de μ qui sont au moins égales à i . Le diagramme $D(\mu^*)$ se déduit de $D(\mu)$ par la symétrie qui échange lignes et colonnes, c'est-à-dire transforme le point (i,j) en le point (j,i) .

Par exemple , le partage $\mu = (5,4,4,1)$ de 14 s'écrit aussi $1.4^2.5$; le partage dual μ^* s'écrit $(4,3,3,3,1)$ ou $1.3^3.4$, et le diagramme $D(\mu)$ se représente sous l'une des formes suivantes



1.2. Notons $p(n,m)$ le nombre de partages de n en m parts, et $p(n)$ le nombre de partages de n ; on a donc $p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} p(n,m)$ pour $n \geq 1$ et $p(0) = p(0,0)$ est égal à 1 . On obtient facilement la série génératrice

$$\sum_{m,n} p(n,m)u^m q^n = \prod_{i\geq 1} (1 - uq^i)^{-1} , \tag{1}$$

d'où l'on déduit

(2) $$\sum_{n\geq 0} p(n)q^n = \prod_{i\geq 1} (1-q^i)^{-1} \quad .$$

Si l'on note $p^*(n,m)$ et $p^*(n)$ les nombres analogues pour les partages en parts inégales , on a

(3) $$\sum_{m,n} p^*(n,m)u^m q^n = \prod_{i\geq 1} (1+uq^i)$$

(4) $$\sum_{n\geq 0} p^*(n)q^n = \prod_{i\geq 1} (1+q^i) \quad .$$

On trouvera dans Andrews [2,chap.1] de nombreuses formules analogues .

L'inverse de la série génératrice (2) est donnée par la formule d'Euler

(5) $$\prod_{i\geq 1} (1-q^i) = \sum_{m} (-1)^m q^{m(3m-1)/2}$$

(où m parcourt l'ensemble $\underline{\underline{Z}}$ des entiers rationnels) ; l'interprétation combinatoire est la suivante : si $p_+(n)$ est le nombre de partages de n en un nombre pair de parts toutes distinctes , et si $p_-(n)$ est défini de manière analogue avec un nombre impair de parts , alors on a $p_+(n) = p_-(n)$ sauf dans le cas où n est un nombre "pentagonal" $m(3m-1)/2$, auquel cas on a $p_+(n) = p_-(n) + (-1)^m$. Une démonstration combinatoire de ce résultat est due à F.Franklin.

1.3. Les formules qui précèdent conduisent à introduire les séries de puissances suivantes :

(6) $$(u;q)_\infty = \prod_{i\geq 0} (1-uq^i)$$

(7) $$(u;q)_n = (u;q)_\infty/(uq^n;q)_\infty = (1-u)(1-uq)\ldots(1-uq^{n-1}) \quad .$$

En particulier , $(q;q)_n$ (noté aussi $\Phi_n(q)$) est égal à $(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)$.

Une identité remarquable est due à Cauchy ; sous forme symétrique, elle s'écrit

(8) $$(a;q)_\infty/(b;q)_\infty = \sum_{n\geq 0} (b-a)(b-aq)\ldots(b-aq^{n-1})/\Phi_n(q) \quad ;$$

la forme dyssymétrique est la suivante

(9) $$(au;q)_\infty/(u;q)_\infty = \sum_{n\geq 0} u^n (a;q)_n/\Phi_n(q) \quad .$$

L'inverse $\prod_{i\geq 0} (1-uq^i)^{-1}$ de $(u;q)_\infty$ s'appelle aussi la q-<u>exponentielle de</u> u et se note $e(u;q)$. De la formule (9) , on déduit les deux corollaires suivants dus à Euler

(10) $$e(u;q) = \sum_{n\geq 0} u^n/\Phi_n(q)$$

$$(11) \qquad e(-u;q)^{-1} = \sum_{n\geq 0} u^n q^{n(n-1)/2}/\Phi_n(q) .$$

Une démonstration combinatoire s'obtient facilement en revenant aux séries génératrices (1) et (3) . Par analogie avec les fonctions trigonométriques , on peut poser

$$(12) \qquad e(iu;q) = \cos(u;q) + i \sin(u;q) \quad (\text{avec } i^2 = -1) ,$$

et plus généralement définir les q-analogues de diverses fonctions spéciales (voir le livre de Bailey [3]).On remarquera que $\Phi_n(q)/(1-q)^n$ est le polynôme

$$(1+q)(1+q+q^2)\dots(1+q+\dots+q^{n-1})$$

en q qui prend la valeur $n!$ pour $q = 1$. Il résulte alors de la formule (10) que $\exp(u)$ s'obtient par substitution de 1 à q dans $e(u(1-q);q)$; remarque analogue pour le sinus, le cosinus et les autres fonctions spéciales .

1.4. Le coefficient du binôme $\binom{n}{m}$ a été généralisé par Gauss sous la forme

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \Phi_n(q)/\Phi_m(q)\Phi_{n-m}(q) \quad ;$$

lorsque l'on fait $q = 1$, on retrouve bien $\binom{n}{m}$ d'après la remarque précédente . L'analogue du triangle de Pascal est fourni par les règles suivantes :

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q = 1 \quad , \quad \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q + q^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_q \quad ,$$

d'où l'on déduit le fait que $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q$ est un polynôme en q à coefficients entiers positifs. La formule du binôme donnant $(1-u)^n$ se généralise sous la forme

$$(13) \qquad (u;q)_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q u^m q^{m(m-1)/2} .$$

On peut aussi introduire les coefficients multinomiaux

$$(14) \qquad [n_1,\dots,n_r]_q = \Phi_n(q)/\Phi_{n_1}(q)\dots\Phi_{n_r}(q)$$

avec $n = n_1 + \dots + n_r$ (ils sont souvent notés $\begin{bmatrix} n \\ n_1 \dots n_r \end{bmatrix}_q$). On peut donner des formules de récurrence généralisant la règle de Pascal , qui montrent que ce sont des polynômes à coefficients entiers positifs en q ; je préfère introduire une généralisation non commutative de la formule du binôme . Supposons que l'on ait des éléments $x_1,\dots,x_r,q$ d'un anneau A satisfaisant aux relations de commutation

$$(15) \qquad x_i x_j = q x_j x_i \quad \text{pour} \quad i > j \quad ;$$

alors on a