

Astérisque

MAURIZIO CORNALBA

Systèmes pluricanoniques sur l'espace des modules des courbes et diviseurs de courbes k -gonales

Astérisque, tome 121-122 (1985), Séminaire Bourbaki, exp. n° 615, p. 7-24

http://www.numdam.org/item?id=SB_1983-1984__26__7_0

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SYSTÈMES PLURICANONIQUE SUR L'ESPACE DES MODULES DES
COURBES ET DIVISEURS DE COURBES k -GONALES
[d'après Harris et Mumford]

par Maurizio Cornalba

En 1915, Severi [21] esquisssa une démonstration de l'unirationalité de M_g , l'espace des modules des courbes de genre g sur $\mathbb{C}$, pour $g \leq 10$. Dans son mémoire Severi conjecturait aussi que le même résultat devrait rester valable pour toute valeur de g . Cependant, ce ne fut qu'en 1980 que quelque progrès fut obtenu dans la direction indiquée par Severi, avec la démonstration par Sernesi de l'unirationalité de M_{12} [20]. En même temps plusieurs résultats, tels que la présence sur M_g d'un grand nombre de formes n -canoniques avec des pôles logarithmiques à l'infini [16], ou, dans une direction quelque peu différente, le fait que l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g est de type général pour g assez grand [8] [9] [22], semblaient indiquer que la conjecture de Severi pourrait être fausse. Cela a été en effet prouvé en 1981 par Harris et Mumford [14] [13] qui ont démontré, plus précisément, le résultat suivant.

THÉORÈME. M_g est de type général pour tout g assez grand.

Plus exactement, il est démontré dans [14] que M_g est de type général si g est impair et ≥ 25 (et de dimension de Kodaira différente de $-\infty$ si $g = 23$), tandis que dans le cas de genre pair le résultat est établi dans [13] pour $g \geq 40$. Je viens d'apprendre que Eisenbud et Harris ont récemment montré que M_g est de type général pour tout $g \geq 24$ pair ou impair, au moyen d'une variante de la méthode de Harris-Mumford. Leur technique semble montrer aussi que M_g est de dimension de Kodaira positive si $g = 23$. D'autre part, Chang et Ran ont montré que M_g est unirationnel si $g = 11, 13$ [5] [6]. Le problème de calculer la dimension de Kodaira de M_g reste donc ouvert pour g compris entre 14 et 23; on a des résultats partiels seulement pour $g = 23$.

Cet exposé se propose de décrire la méthode employée par Harris-Mumford et Eisenbud-Harris dans leurs démonstrations, avec une attention particulière au cas de genre impair.

1. Le groupe de Picard de $\bar{M}_g$

Toutes les variétés qui interviendront par la suite seront des variétés sur le corps des nombres complexes. Rappelons qu'une courbe stable de genre $g > 1$ est une courbe connexe, réduite, de genre arithmétique g , ayant pour toute singularité des points doubles ordinaires, et telle que l'intersection de chaque composante rationnelle lisse avec la réunion des autres composantes contient au moins trois points. On note $\bar{M}_g$ l'espace des modules des courbes stables de genre g . Tout point de $\bar{M}_g$ correspond donc à une classe d'isomorphisme de courbes stables de genre g . On sait que $\bar{M}_g$ est une variété irréductible, normale, et projective (voir [17], par exemple). Soit $\Delta = \bar{M}_g - M_g$ le lieu des courbes stables singulières. Puisque toute courbe stable singulière est la spécialisation d'une courbe stable avec un seul point singulier, Δ a pour composantes irréductibles les lieux

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{[g/2]}$$

où un point général de Δ_0 correspond à une courbe singulière irréductible, et un point général de Δ_i , $i > 0$, correspond à une courbe lisse de genre i attachée en un point à une courbe lisse de genre $g-i$. Un calcul élémentaire de modules montre que les Δ_i sont des diviseurs dans $\bar{M}_g$.

Soit C une courbe stable et notons $[C]$ le point correspondant de $\bar{M}_g$. La courbe C a une déformation universelle $f: \tilde{C} \rightarrow B$ où B est un polydisque de dimension $3g-3$. Le groupe $\text{Aut}(C)$ agit sur B et sur $\tilde{C}$ de manière équivariante. On sait que, au voisinage de $[C]$, $\bar{M}_g$ est le quotient de B par $\text{Aut}(C)$. Si $g > 2$, le morphisme quotient est ramifié le long du lieu des courbes à automorphismes. On notera $\bar{M}_g^0$ (resp. M_g^0) l'ouvert de $\bar{M}_g$ (resp. M_g) dont les points correspondent à des courbes sans automorphismes non triviaux, et $\bar{M}_{g,\text{reg}}$ l'ouvert des points lisses de $\bar{M}_g$. Soit $[C]$ un point de Δ_1 ; autrement dit, C est obtenue en identifiant un point lisse d'une courbe de genre $g-1$ avec un point lisse q d'une courbe E , elliptique ou rationnelle avec un point double ordinaire. La courbe C a toujours un automorphisme non trivial (et, en général, un seul, si $g \geq 3$), c'est à dire la réflexion dans E par rapport à q . Si $g \geq 4$, il est facile de montrer que toute composante de $\bar{M}_g - \bar{M}_g^0$, à l'exception de Δ_1 , est de codimension au moins deux. C'est une conséquence du théorème de pureté du lieu de ramification que, si $g \geq 4$, $\bar{M}_{g,\text{reg}}$ est la réunion de $\bar{M}_g^0$ et du lieu des points de Δ_1 correspondents à des courbes avec un seul automorphisme non trivial. Par la suite on supposera en général que $g \geq 4$.

Si n est un entier assez grand ($n=3$ suffit), l'ensemble H_g des courbes stables n -canoniques de genre g est une sous-variété lisse localement fermée du schéma de Hilbert des sous-variétés de $\mathbb{P}^{(2n-1)(g-1)-1}$ avec polynôme de Hilbert

$$\xi(h) = (2nh-1)(g-1),$$

et son quotient par l'action du groupe projectif $G = \text{PGL}((2n-1)(g-1))$ est $\bar{M}_g$. On a ainsi une injection

$$\alpha: \text{Pic}(\bar{M}_g) \rightarrow \text{Pic}^G(H_g)$$

du groupe de Picard de $\bar{M}_g$ dans le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles G -linéarisés sur H_g . Par contre, soit $\text{Pic}_{\text{fun}}(\bar{M}_g)$ le groupe de Picard du "foncteur des modules", c'est à dire le groupe dont les éléments sont constitués par la donnée pour chaque famille plate $f: \mathcal{C} \rightarrow S$ de courbes stables, d'un faisceau inversible L_f sur S et par la donnée, pour chaque diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ S & \xrightarrow{h} & T \end{array}$$

d'un isomorphisme entre L_f et $h^*(L_{f'})$ avec des propriétés de compatibilité évidentes. Comme il y a sur H_g une famille universelle $\pi: Z_g \rightarrow H_g$ on a un homomorphisme naturel

$$\beta: \text{Pic}_{\text{fun}}(\bar{M}_g) \rightarrow \text{Pic}^G(H_g).$$

LEMME 1.1 i) β est un isomorphisme.

ii) Le conoyau de α est un groupe de torsion.

iii) $\text{Pic}^G(H_g)$ est sans torsion.

L'assertion i) est presque évidente. Pour iii) on renvoie à [17]. Quant à ii), elle est une conséquence de l'observation qu'il y a une borne supérieure uniforme pour le nombre d'automorphismes d'une courbe stable de genre g . Si L est un fibré en droites G -linéarisé sur H_g , pour que L descende à un fibré sur $\bar{M}_g$, il faut et suffit que pour tout point p de H_g le groupe d'isotropie de p agisse d'une façon triviale sur la fibre L_p . Comme ce groupe s'identifie au groupe d'automorphismes de la courbe stable correspondante à p , il s'ensuit qu'une puissance convenable de L descend à $\bar{M}_g$.

Par la suite nous allons indiquer de façon additive l'opération dans Pic et nous considérons $\text{Pic}(\bar{M}_g)$ et $\text{Pic}^G(H_g)$ comme des réseaux dans le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\text{Pic}(\bar{M}_g) \otimes \mathbb{Q}$. Suivant [17], on peut définir certains éléments "naturels" de $\text{Pic}^G(H_g)$. Le premier entre eux est la "classe de Hodge" λ , c'est à dire la classe de $\wedge^g \pi_*(\omega_\pi)$, où ω_π est le faisceau dualisant relatif pour π . Les autres sont les classes $\delta_0, \delta_1, \dots$ des lieux des images n -canoniques des courbes dans $\Delta_0, \Delta_1, \dots$. Puisque $\Delta_0, \Delta_2, \dots$ rencontrent $\bar{M}_{g, \text{reg}} - \bar{M}_g^0$ en une sous-variété de codimension au moins deux dans $\bar{M}_g$, on vérifie aisément que $\delta_0, \delta_2, \dots$ descendent à des classes sur $\bar{M}_{g, \text{reg}}$ correspondantes aux classes des diviseurs $\Delta_0, \Delta_2, \dots$. D'autre part, si B est la base de la déformation universelle d'une courbe

correspondante à un point général de Δ_1 , le morphisme naturel $B \rightarrow \bar{M}_g$ est un revêtement de degré deux ramifié le long de Δ_1 . Il s'ensuit que

$$2\delta_1 = \Delta_1$$

et que δ_1 ne descend pas à $\bar{M}_{g, \text{reg}}$. Si on note E la composante elliptique de C , Γ l'autre composante, et φ l'automorphisme non trivial de C , il est clair que φ agit par -1 sur l'unique section de ω_C qui s'annule sur Γ , et agit d'une façon triviale sur les sections qui s'annulent sur E . Donc φ agit par -1 sur $\Lambda^{gH^0}(C, \omega_C)$, λ ne descend pas à $\bar{M}_{g, \text{reg}}$, mais 2λ descend, et $\lambda + \delta_1$ aussi.

2. Plan de la démonstration

On suppose toujours que $g \geq 4$. Notons K la classe canonique sur $\bar{M}_{g, \text{reg}}$.

LEMME 2.1. Dans $\text{Pic}(\bar{M}_{g, \text{reg}}) \otimes \mathbb{Q}$ on a

$$K = 13\lambda - 2\delta_0 - 3\delta_1 - 2\delta_2 - \dots - 2\delta_{[g/2]} .$$

L'idée de la démonstration est la suivante. Soit $f: H_g \rightarrow \bar{M}_g$ le morphisme naturel. Si $[C]$ est un point de $\bar{M}_g$ et B est la base de la déformation universelle de C , f se factorise, sur un ouvert U de H_g , de la façon suivante:

$$U \xrightarrow{f'} B \xrightarrow{h} \bar{M}_g .$$

Nous rappelons que l'espace tangent à B en un point correspondant à une courbe Γ s'identifie à $\text{Ext}^1(\Omega_\Gamma^1, \mathcal{O}_\Gamma)$, où Ω_Γ^1 est le faisceau des différentielles de Kähler. Par dualité, l'espace cotangent est $H^0(\Gamma, \Omega_\Gamma^1 \otimes \omega_\Gamma)$ et on a donc un isomorphisme entre $f'^*(\Omega_B^{3g-3})$ et $\Lambda^{3g-3} \pi_* (\Omega_\Gamma^1 \otimes \omega)$, où nous avons écrit, pour simplifier, Ω^1 et ω au lieu de Ω_{Z_g/H_g}^1 et ω_{Z_g/H_g} . Puisque h est un isomorphisme (sur un ouvert de $\bar{M}_g$) si $[C]$ est un point de $\bar{M}_g^0$, tandis qu'il est un revêtement double ramifié le long de Δ_1 quand $[C]$ est un point général de Δ_1 , on conclut que, sur $\bar{M}_{g, \text{reg}}$, on a

$$K = c_1(\pi_*(\Omega_\Gamma^1 \otimes \omega)) - \delta_1 .$$

Puisque $H^1(\Gamma, \Omega_\Gamma^1 \otimes \omega_\Gamma) = 0$ pour toute courbe stable Γ , pour calculer le côté droit on peut employer le théorème de Riemann-Roch de Grothendieck, qui donne

$$\text{ch}(\pi_*(\Omega_\Gamma^1 \otimes \omega)) = \text{ch}(\pi_*(\Omega_\Gamma^1 \otimes \omega)) = \pi_*(\text{ch}(\Omega_\Gamma^1 \otimes \omega) T(\Omega_\Gamma^1))$$

dans $A(H_g) \otimes \mathbb{Q}$. On obtient sans difficulté que $c_1(\pi_*(\Omega_\Gamma^1 \otimes \omega))$ est égal à $13\lambda - 2\sum \delta_i$, d'où la thèse.