MARIE-LOUISE MICHELSON

Surfaces minimales dans les sphères

Astérisque, tome 154-155 (1987), p. 115-130
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__154-155__115_0>

EXPOSÉ n° VI

SURFACES MINIMALES DANS LES SPHÈRES

Marie-Louise MICHELSOHN

I. INTRODUCTION.

Le but de cet article est d'étudier des immersions minimales de S^2 dans S^{n-1}. Il s'agit surtout des travaux de Calabi [2], [3] avec une amélioration de Barbosa [1]. L'idée directrice, analogue à l'argument de H. Hopf [5], est d'utiliser le fait que sur S^2 il n'existe aucune p-forme holomorphe, pour $p > 0$, ce qui rigidifie la géométrie.

Le scénario découle de l'observation suivante : une sous-variété complexe d'une variété kählérienne doit être minimale. Donc une immersion holomorphe $\varphi : M \looparrowright X$ dans une variété kählérienne X est toujours une immersion minimale. D'ailleurs soit $\pi : X \to Y$ une submersion riemannienne et soit $\varphi : M \looparrowright X$ une immersion minimale telle que φ soit horizontale pour la submersion π, alors $\pi \circ \varphi : M \to Y$ est minimale. Ainsi, si $\pi : X \to Y$ est une submersion riemannienne d'une variété kählérienne X et si φ est une application d'une surface de Riemann dans X de telle sorte que φ soit holomorphe et horizontale par rapport à la submersion π, alors $\pi \circ \varphi$ est minimale.

Or pour une immersion minimale conforme ψ de S^2 en $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, E. Calabi a montré qu'il existe une réciproque. Ainsi il a construit une sous-variété X de $\mathbb{C}P^N$, avec N grand, et une fonction holomorphe, Ξ, de S^2 dans X telles que :

1) il y ait une submersion riemannienne $\pi : X \to S^{n-1}$,
2) Ξ soit un relèvement de φ,
3) Ξ soit horizontale par rapport à la submersion de π.

E. Calabi en a tiré le théorème suivant.

THÉORÈME PRINCIPAL (Calabi). - <u>Soit $\varphi : S^2 \to S^{n-1}$ une immersion minimale telle que l'image de S^2 ne soit pas contenue dans un équateur de S^{n-1}. Alors</u>

1) <u>$n-1$ est pair, disons $2m$,</u>
2) <u>l'aire de S^2 immergée est $2k\pi$, où k est un entier,</u>
3) <u>$k/2 \geqslant \binom{m+1}{2}$. Cette borne inférieure est atteinte.</u>

Ce résultat a été amélioré de la façon suivante.

Amélioration du Théorème Principal (Barbosa). Soit $\varphi : S^2 \to S^{n-1}$ une immersion vérifiant les hypothèses du théorème précédent. Alors l'aire de S^2 immergée est $4\pi q$ où q est un entier.

Remarque : La preuve du théorème principal est aussi valable pour une immersion minimale ramifiée de S^2 dans S^{n-1}. Par immersion minimale ramifiée, on veut dire une application φ lisse dont les points singuliers (ceux où $d\varphi$ s'annule) sont isolés et qui est minimale en dehors de ces points. Puisque toutes les applications $\varphi : S^2 \to S^{n-1}$ harmoniques et non-constantes sont des immersions minimales ramifiées (cela reste vrai même si on remplace S^{n-1} par une variété riemannienne quelconque, cf. [4]), on a ce théorème pour les applications harmoniques de S^2 dans S^{n-1}.

II. CONSTRUCTION.

Soit S^{n-1} la sphère de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$ et soit $\psi : S^2 \to S^{n-1}$ une immersion isométrique minimale. Prenons les coordonnées isothermes suivantes $z = x + iy$. La métrique induite est

$$ds^2 = 2F(z,\bar{z})\ |dz|^2 \tag{1}$$

où $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, et $F = \left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|^2 = \left|\frac{\partial\psi}{\partial \bar{z}}\right|^2$. Donc $2F \equiv \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2 = \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|^2$ et $\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\rangle \equiv 0$.
L'équation des surfaces minimales est

$$\Delta\psi = -2\psi \quad ; \tag{2}$$

comme, pour une surface minimale,

$$\Delta = \frac{1}{2F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{2}{F}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad , \tag{3}$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\psi = -F\psi \tag{4}$$

Nous allons travailler dans $\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$, donc dans $\mathbb{C}^n$ avec une structure réelle distinguée. Indiquons par "." l'extension <u>bilinéaire complexe</u> de la métrique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{C}^n$. Nous prolongerons encore cette métrique à $(\Lambda^p_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda^p_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$ par

(5) $$v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \,.\, w_1 \wedge \ldots \wedge w_p = \det_{\mathbb{C}}(v_i \,.\, w_j) \quad .$$

Par contre, la métrique <u>hermitienne</u> sera indiquée par

(6) $$(r,w) = r \,.\, \overline{w} \quad .$$

Or nos équations sont

(7) $|\psi|^2 \equiv 1$ car S^{n-1} est de rayon 1,

(8) $\psi_z \,.\, \psi_{\overline{z}} = F$

(9) $\psi_z \,.\, \psi_z = 0$

car $z = x + iy$, x et y étant des coordonnées isothermes,

(10) $\psi_{z\overline{z}} = -F\psi$ par l'équation des surfaces minimales.

Observons que $\psi \,.\, \psi \equiv 1$ entraîne que

(11) $$\psi \,.\, \psi_z \equiv \psi \,.\, \psi_{\overline{z}} \equiv 0 \quad .$$

De la même manière $\psi_z \,.\, \psi_z \equiv 0$ entraîne que

(12) $$\psi_z \,.\, \psi_{zz} \equiv \psi_z \,.\, \psi_{z\overline{z}} \equiv 0 \quad .$$

LEMME 13. - <u>Soit</u> $\psi : S^2 \to S^{n-1}$ <u>une immersion minimale isométrique et</u> x, y <u>des coordonnées isothermes pour</u> ψ. <u>Soit</u> Φ <u>la section de</u> $\otimes^4 T^{1,0}$ <u>définie par</u>

$$\Phi \equiv (\psi_{zz},\psi_{zz})\, dz^4 \quad \underline{\text{où}} \quad z = x + iy \quad .$$

<u>Alors</u> Φ <u>est bien définie et holomorphe</u>.

<u>Preuve</u> : Prenons deux coordonnées locales holomorphes z et w. On a $\psi_w = \frac{dz}{dw} \psi_z$. Donc

(14) $$\psi_{ww} = \frac{d^2 z}{dw^2} \psi_z + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2 \psi_{zz} \quad .$$

Ainsi

$$(15) \qquad \psi_{ww} \cdot \psi_{ww} = \left(\frac{dz}{dw}\right)^4 \psi_{zz} \cdot \psi_{zz}$$

est bien défini. D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\psi_{zz} \cdot \psi_{zz}) &= 2\psi_{zz\bar{z}} \cdot \psi_{zz} \\ &= 2(\psi_{z\bar{z}})_z \cdot \psi_{zz} \\ &= 2(-2F\psi)_z \cdot \psi_{zz} \\ &= -4(F_z\psi + F\psi_z) \cdot \psi_{zz} = 0 \quad , \end{aligned}$$

en utilisant (11) après avoir dérivé (9).
Par ailleurs, il n'existe aucune p-forme holomorphe sur S^2. Donc $\Phi \equiv 0$. ■

COROLLAIRE 16 . - <u>Soit</u> $\psi : S^2 \to S^{n-1}$ <u>une immersion minimale isométrique et</u> z <u>un paramètre isotherme</u>. <u>Alors</u>, <u>l'équation suivante est vérifiée</u>

$$\psi_{zz} \cdot \psi_{zz} \equiv 0$$

<u>et donc</u>

$$\psi_{zzz} \cdot \psi_{zz} \equiv 0 \quad .$$

Par récurrence, en considérant la section Φ_k de $\otimes^{2k} T^{1,0'}$ définie par

$$\Phi_k \equiv \left(\frac{\partial^k \psi}{\partial z^k}, \frac{\partial^k \psi}{\partial z^k}\right) dz^{2k}$$

que l'on peut prouver être bien définies et holomorphes, on peut montrer :

LEMME 17 . - <u>Soit</u> $\psi : S^2 \to S^{n-1}$ <u>une immersion minimale isométrique et</u> z <u>un paramètre isotherme</u>, <u>alors</u>

$$(18) \qquad \frac{\partial^i \psi}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial^j \psi}{\partial z^j} \equiv 0 \quad , \qquad i+j \geqslant 1$$

<u>quels que soient les entiers</u> i <u>et</u> j.

Définissons des fonctions ψ_k et Ξ_k à valeurs dans $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$: