

Astérisque

HEDY ATTOUCH

Homogénéisation

Astérisque, tome 161-162 (1988), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 686, p. 7-30

http://www.numdam.org/item?id=SB_1987-1988__30__7_0

© Société mathématique de France, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

HOMOGENÉISATION

par Hedy ATTOUCH

PLAN :

1. Introduction.
2. Exemples.
3. Méthodes énergétiques et compacité par compensation.
4. Convergences variationnelles. Méthodes de Γ -convergence, épi-convergence.
5. Comparaison des différentes méthodes.
6. Homogénéisation avec information incomplète. Homogénéisation stochastique.

1. INTRODUCTION

Ces dernières années ont vu un développement considérable dans l'étude et l'utilisation des matériaux composites, principalement dans les branches à technologie avancée (matériaux nouveaux, industrie nucléaire, aérospatiale...). La structure de ces matériaux peut être très diverse (structures stratifiée, fibrée, matériaux poreux...) leur point commun étant d'être composés de divers constituants intimement mélangés, imbriqués. Une difficulté majeure rencontrée dans l'étude des équations de la physique dans de tels matériaux est que les divers paramètres physiques (coefficients de conductivité, d'élasticité...) sont discontinus et varient très vite d'un constituant à l'autre. Une approche numérique, type éléments finis, basée sur une méthode de discrétisation, tombe alors en défaut. En effet, pour prendre en compte les conditions de transmission d'un constituant à l'autre, le pas de discrétisation doit être pris très petit, à l'échelle de la structure microscopique du matériau, le temps et le coût du calcul devenant, par conséquent, prohibitifs.

La théorie de l'homogénéisation repose sur la remarque suivante : lorsque les constituants sont intimement mêlés, la structure *microscopique* du matériau devient très complexe, en contrepartie d'un point de vue *macroscopique* le matériau tend à se comporter comme un matériau idéal, homogène. La théorie de l'homogénéisation se propose de déterminer ce problème homogénéisé (il est préférable de penser en terme de problème homogénéisé plutôt que de matériau homogénéisé car le processus d'hom-

S.M.F.

Astérisque 161-162 (1988)

généralisation dépend du phénomène physique étudié). Le traitement numérique du problème homogénéisé relève alors des méthodes classiques. Au départ, ce sont donc des considérations numériques qui ont motivé le développement de la théorie de l'homogénéisation. Nous verrons plus loin d'autres champs d'application de cette théorie (contrôle, optimum design...). Sans entrer dans les détails, disons tout de suite que l'étude du processus d'homogénéisation soulève des problèmes mathématiques fort délicats à résoudre. Outre l'importance technologique du sujet, c'est ce challenge et la grande curiosité suscitée par l'apparition de termes dits "étranges" dans certains problèmes homogénéisés qui ont motivé de nombreux travaux mathématiques. Il y a autant de problèmes d'homogénéisation qu'il y a de problèmes physiques, de lois de comportement et de conditions aux limites (lorsque celles-ci interviennent à l'échelle microscopique comme dans les matériaux poreux, rugueux, fissurés...). Nous nous attacherons donc plutôt à décrire les méthodes les plus générales fonctionnant aussi bien pour les problèmes linéaires que non linéaires, mettant l'accent sur :

a) les méthodes énergétiques avec l'utilisation d'outils type compacité par compensation développées par Murat & Tartar [31] [34] [41] ...

b) les méthodes variationnelles avec l'utilisation des concepts de convergences variationnelles (Γ -convergence, épi-convergence, Mosco-convergence) introduits par De Giorgi [20], Mosco [30], Attouch & Wets [7] ... et utilisés en homogénéisation par Marcellini [28], Carbone [13], Dal-Maso & Modica [19], Attouch et Buttazzo [4]... D'autres méthodes sont également très intéressantes en vue de la résolution de problèmes d'homogénéisation, citons

c) développement asymptotique par la méthode des échelles multiples cf. A. Bensoussan & J.L. Lions & G. Papanicolaou [9], E. Sanchez-Palencia [38] particulièrement adaptées à l'étude des problèmes linéaires.

d) méthodes probabilistes lorsque le problème a une interprétation probabiliste, cf. Papanicolaou & Varadhan [36], Yurinskij [46]...

Pour le lecteur désireux d'aller plus avant dans cette théorie, citons parmi les nombreux ouvrages parus sur la question :

A. Bensoussan & J.L. Lions & G. Papanicolaou [9], E. Sanchez-Palencia [38], H. Attouch [1], A.V. Marchenko & E. Ya Hruslov [29], J.L. Lions [26], N.S. Bahvalov & G.P. Panasenko [8] .

2. EXEMPLES

Nous nous intéresserons principalement à deux situations "modèles", significatives quant à l'utilisation des diverses méthodes exposées ci-dessus. Nous

considérerons des problèmes aux limites posés dans Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N ($N = 1, 2$ ou 3 dans les applications). Nous noterons $x \in \Omega$ la variable d'espace et ε réel strictement positif désignera la "périodicité" de la structure microscopique. Dans un premier temps, nous étudierons le cas des structures périodiques déterministes (nous parlerons plus loin du problème d'homogénéisation stochastique). A cet effet, étant donné

$$Y = [0, 1[{}^N \text{ la cellule unité dans } \mathbb{R}^N$$

nous considérons la structure ε -périodique dans \mathbb{R}^N engendrée par εY .

2.1 - Equation de l'électrostatique

Supposant les différents constituants homogènes et isotropes, la conductivité du matériau est décrite par la fonction

$$x \longmapsto a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

où $a : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction Y -périodique donnée. Pour visualiser cette situation nous avons représenté ci-dessous un matériau formé à partir de deux composants de conductivités respectives α et β .

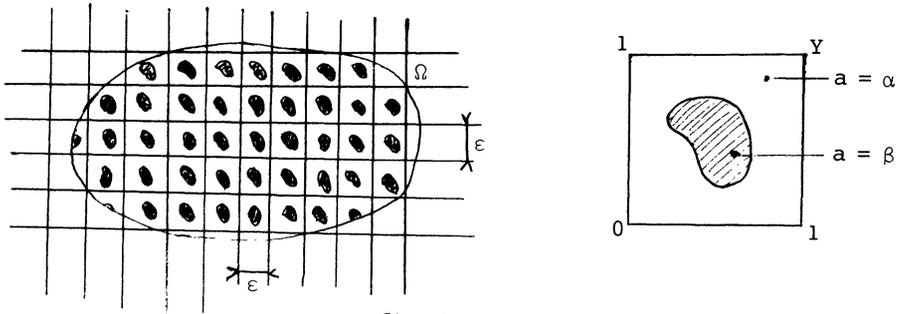


fig. 1

Si la frontière de Ω est maintenue au potentiel u_0 donné, en présence d'une densité de charge f sur Ω ($f \in L^2(\Omega)$), le potentiel d'équilibre $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution du problème variationnel suivant :

$$(1) \min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |Du(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x) u(x) dx : u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

dont l'équation d'Euler est :

$$(2) \begin{cases} -\operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) Du(x)\right) = f(x) & \text{sur } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le véritable problème physique se pose à $\varepsilon = \varepsilon_0$, petit mais fixé. Comme nous l'avons expliqué, bien que les problèmes (1), (2) soient bien posés mathématiquement, leur

résolution numérique est difficile. L'idée de la théorie de l'homogénéisation est de considérer ε comme un paramètre et de faire tendre ε vers zéro dans les équations considérées. Ce faisant, pour chaque $\varepsilon > 0$, on va avoir u_ε solution de :

$$(2_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) Du_\varepsilon \right) = f & \text{sur } \Omega \\ u_\varepsilon = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

la question étant de passer à la limite sur (2_ε) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Supposant $+\infty > \beta > \alpha > 0$, on a $\bar{a}_\varepsilon(x) := a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \geq \alpha > 0$ sur Ω . Il résulte de l'inégalité de Poincaré que la suite $\{u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ reste bornée dans $H^1(\Omega)$ et donc faiblement relativement compacte dans $H^1(\Omega)$. On peut donc extraire une sous-suite (que l'on notera encore u_ε) telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible.}$$

Cette information ne nous permet pas pour autant de passer à la limite sur (2_ε)

$$(3) \quad \begin{cases} a \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \longrightarrow \int_Y a(y) dy & L^\infty \text{ étoile faible} \\ Du_\varepsilon \longrightarrow Du & \text{dans } L^2 \text{ faible} \end{cases}$$

car le produit de deux suites faiblement convergentes n'est pas en général convergent, même au sens des distributions !

Le passage à la limite dans le cas $N = 1$ est à cet égard significatif :

Introduisant

$$(4) \quad \xi_\varepsilon = a_\varepsilon \cdot Du_\varepsilon$$

on a

$$(5) \quad Du_\varepsilon = \frac{1}{a_\varepsilon} \cdot \xi_\varepsilon .$$

La suite $\{\xi_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ reste bornée dans $L^2(\Omega)$, ainsi que la suite des dérivées $\left\{ \frac{d}{dx} \xi_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0 \right\}$ (car $\operatorname{div} = \frac{d}{dx}$ lorsque $N = 1$!). Elle reste donc bornée dans $H^1(\Omega)$ et donc relativement compacte dans $L^2(\Omega)$ fort d'après le théorème de Rellich-Kondrakov. On peut alors passer à la limite sur (5) :

Notant

$$\xi_\varepsilon \longrightarrow \xi \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort}$$

on obtient

$$(6) \quad Du = \left(\int_Y \frac{1}{a} \right) \cdot \xi .$$

Passant à la limite au sens des distributions sur

$$-\frac{d}{dx} \xi_\varepsilon = f$$