E. Le Page

Marches aléatoires sur les groupes localement compacts

Astérisque, tome 4 (1973), p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__4__1_0>

MARCHES ALEATOIRES

SUR LES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

par

E. LE PAGE

INTRODUCTION.-

Le but de cet exposé est de rappeler (souvent sans démonstration, lorsque celle-ci n'est pas utile dans la suite) les principales définitions et les principaux résultats relatifs aux marches aléatoires. Cet article sert en quelque sorte d'introduction aux suivants.

Même si les énoncés de certains théorèmes comportent des notions probabilistes, les résultats de ce recueil sont assez largement indépendants de la théorie des probabilités. On s'intéresse plutôt à l'opérateur $f \longmapsto \mu * f$ où f parcourt $L^1(\mathcal{G})$, $L^2(\mathcal{G})$ ou $C(\mathcal{G})$ ...

Soit $\mathcal{G}$ un groupe localement compact, $\underline{\underline{\mathcal{G}}}$ sa tribu borélienne.

0-1 Définition.-

On appelle marche aléatoire droite (resp. gauche) sur $\mathcal{G}$ toute chaîne de Markov de probabilité de transition $\varepsilon_g * \mu$ (resp. $\mu * \varepsilon_g$) pour une probabilité μ sur $\mathcal{G}$. On dira que μ est la loi de ces marches aléatoires.

Soit $\Omega = \mathcal{G}^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu borélienne. Q la mesure sur Ω produit des mesures μ sur chaque facteur. Notons pour tout g de $\mathcal{G}$ P_g la mesure image de Q par l'application $(g_1, g_2, g_3 \ldots) \longrightarrow (g, gg_1, gg_1g_2, \ldots)$ de Ω dans Ω. On note X_n la nième application coordonnée de Ω dans $\mathcal{G}$ $(\Omega, (P_g)_{g \in \mathcal{G}}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}})$ une réalisation appelée réalisation canonique de la marche aléatoire de loi μ. Elle possède la propriété suivante.

0-2 Proposition.-

Les variables aléatoires $Z_n = X_{n-1}^{-1} X_n$ $n \geq 1$ sont indépendantes et de loi μ pour toute probabilité P_g sur Ω.

La théorie des chaînes de Markov montre que l'étude de toute marche aléatoire droite de loi μ se ramène à l'étude de cette réalisation canonique. Dans la suite, nous supposerons que la marche aléatoire étudiée est la réalisation canonique.

§ 1 - RECURRENCE ET TRANSIENCE. -

Dans ce paragraphe, nous considérerons une marche aléatoire droite X de loi μ sur un groupe $\mathcal{G}$ localement compact.

On appellera T_μ le semi - groupe fermé engendré par le support de μ . La démonstration du résultat suivant est immédiate.

1-1 Lemme

$g \in T_\mu$ si et seulement si pour tout voisinage V de g il existe un entier n tel que $\mu^n(V) > 0$.

Si on appelle $\mathcal{G}_\mu$ le sous groupe fermé engendré par le support de μ c'est encore un groupe localement compact et pour tout $g \in \mathcal{G}_\mu$ on a $P_g\ [\bigcap_n (X_n \in \mathcal{G}_\mu)] = 1$. On peut donc restreindre la promenade aléatoire à $\mathcal{G}_\mu$. Dans la suite, nous ferons l'hypothèse

1-2 Le groupe $\mathcal{G}$ est engendré par le support de μ .

Nous allons maintenant définir et étudier une notion de récurrence pour les marches aléatoires.

1-3 Définition

Un élément g est dit récurrent si tout voisinage V de g est visité une infinité de fois P_e presque sûrement soit

$$P_e\ [\ \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ \{\ X_n \in V\ \}] = 1$$

1-4 Proposition

Si l'ensemble R_μ des éléments récurrents est non vide, c'est un sous groupe fermé de $\mathcal{G}$ et on a $T_\mu = \mathcal{G} = R_\mu$

Démonstration.-

Soient $g \in R_\mu$ et $h \in T_\mu$, montrons que $h^{-1}g \in R_\mu$.

Soit U un voisinage de $h^{-1}g$; $h\,U\,g^{-1}$ est un voisinage de e , il existe donc un voisinage V de e tel que $V^{-1}V \subset h\,U\,g^{-1}$. Puisque $V\,h$ est un voisinage de $h \in T_\mu$ il existe un entier $k > 0$ (lemme 1-1) tel que $A = \{X_k \in V\,h\}$ ait une P_e probabilité positive.