

Astérisque

BERNARD MAISONNEUVE

Systemes régénératifs

Astérisque, tome 15 (1974)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__15__1_0>

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	4
APERÇU GENERAL	7
<u>Première Partie : SYSTÈMES REGENERATIFS</u>	
CHAPITRE I . <u>SYSTEMES REGENERATIFS : DEFINITION ET PROPRIETES ELEMENTAIRES</u>	
Notations	14
Définition	16
Exemples	17
Extensions diverses de la propriété de régénération	18
Points de branchement et loi 0-1 .	20
CHAPITRE II . <u>PREMIER PROCESSUS DE MARKOV ASSOCIE A UN SYSTEME REGENERATIF</u>	
Définition de (\hat{X}_t)	22
Caractère markovien de (\hat{X}_t)	22
Réalisation du semi-groupe (\hat{P}_t)	24
Propriété de quasi-continuité à gauche de (\hat{X}_t)	26
Appendice : réalisation des hypothèses (HR) .	28
CHAPITRE III . <u>PROCESSUS DES INCURSIONS. CAS GENERAL</u>	
Topologie de la convergence en mesure	31
Caractère markovien du processus (\hat{I}_t)	32
Réalisation simultanée des semi-groupes (\hat{P}_t) et $(\hat{\pi}_t)$ sur l'espace $\hat{\Omega}$	33
Fonctionnelles R-additives	36
Quasi-continuité à gauche de (\hat{I}_t) .	38
CHAPITRE IV . <u>PROCESSUS DES INCURSIONS. CAS D'UN BON TEMPS D'ARRET</u>	
Bons temps d'arrêt.	40
Noyaux (π_t) et mesures (π^w)	42
Caractère markovien du processus (i_t)	44
Quasi-continuité à gauche.	48

	Pages
CHAPITRE V . <u>FONCTIONNELLES R-ADDITIVES. R-POTENTIELS. R-TEMPS LOCAUX</u>	
Introduction	51
Notations et hypothèses	52
Fonctionnelles (λ, R) -additives	53
Noyaux (H_t^λ) et fonctions (λ, R) -surmédianes	57
Décomposition des (λ, R) -potentiels	60
Support d'une fonctionnelle R-additive	64
Temps locaux	65
Applications	66
Extensions.	70
CHAPITRE VI . <u>DECOMPOSITION ET APPROXIMATION DE LA R-BALAYEE D'UNE FONCTIONNELLE ADDITIVE.</u>	
Notations et hypothèses	73
Système de Lévy du processus (i_t)	76
Approximation de (B_t) .	78
CHAPITRE VII . <u>PROCESSUS DES EXCURSIONS ASSOCIE A UN TEMPS LOCAL CONTINU</u>	
Définition	83
Caractère markovien du processus (e_t)	85
Relation avec ITO [2] .	86
 <u>Deuxième Partie : PROCESSUS DE MARKOV</u>	
CHAPITRE VIII. <u>DECOMPOSITION DE LA RESOLVANTE.</u>	90
CHAPITRE IX . <u>DEUX NOUVEAUX PROCESSUS</u>	
Préliminaires	95
Le processus $\bar{X}_t = (A_t, X_{G_t})$	97
Le processus $X_t = (A_{t-}, X_{G_{t-}})$.	100

	Pages
<u>Troisième Partie : ENSEMBLES REGENERATIFS</u>	
CHAPITRE X . <u>APPLICATIONS AUX ENSEMBLES REGENERATIFS</u>	
Définition et premières propriétés	107
Le processus (R_t)	109
Temps local d'un ensemble régénératif régulier	110
Un théorème de répartition du temps local	112
Approximation du temps local à l'aide des excursions.	113
CHAPITRE XI . <u>ETUDE DES ENSEMBLES REGENERATIFS REGULIERS A L'AIDE DES SUBORDINATEURS</u>	
Preliminaires	117
Structure des ensembles régénératifs réguliers	118
Le processus de l'âge (A_t) .	119
Abstract	124

I N T R O D U C T I O N

La notion de système régénératif généralise simultanément les notions de processus fortement markovien et d'ensemble régénératif (au sens de HOFFMANN-JØRGENSEN). Du point de vue markovien, un tel système est un processus "partiellement markovien", c'est-à-dire ne possédant la propriété de Markov que pour une famille privilégiée de temps d'arrêt. D'un point de vue de renouvellement et de manière intuitive, un système régénératif est un processus subissant des renouvellements aux instants d'un ensemble aléatoire donné et en fonction de l'état présent du processus (et non pas nécessairement de manière indépendante comme pour les processus de renouvellement usuels).

De même que les ensembles régénératifs de HOFFMANN-JØRGENSEN permettent d'étudier de manière intrinsèque l'ensemble $M = \{t : X_t = x_0\}$ associé à un processus fortement markovien (X_t) et un état x_0 , les systèmes régénératifs permettent d'étudier de manière intrinsèque le système constitué

- de l'ensemble $M = \{t : X_t \in F\}$
- du processus lacunaire $\{X_t, t \in M\}$

pour un processus fortement markovien (X_t) et un ensemble presque borélien finement fermé F , souvent appelé frontière. On a ainsi une notion de "processus à la frontière" qui n'est pas liée à l'existence d'un temps local sur F , et qui a l'avantage sur les processus à la frontière habituels de garder l'information relative à l'ensemble M . Le comportement du processus (X_t) hors de l'ensemble M sera également étudié à l'aide du processus des "incursions".

Depuis la rédaction de cette thèse, nous avons découvert dans la littérature les processus semi-markoviens de LEVY, les F-processus de NEVEU et les Markov renewal processes de PYKE. Nous ne développerons pas ici les relations entre ces diverses notions et les systèmes régénératifs.

Nous avons divisé ce travail en courts chapitres et groupé ces chapitres en trois parties. La première partie est consacrée à des résultats généraux sur les systèmes régénératifs, la seconde à quelques résultats supplémentaires relatifs à un processus fortement markovien et à une frontière de son espace d'états, la troisième aux ensembles régénératifs. La présentation matérielle a été assurée à l'I.R.M.A. de Strasbourg par Madame WATHLE, Madame KOEHLI et Monsieur SPRAUL. Je suis heureux de les remercier pour la qualité de leur travail.

P.A. MEYER a bien voulu me faire venir à Strasbourg et diriger mon travail de recherche. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens également à saluer la mémoire de P. VISSIO qui m'a donné le goût des mathématiques, à remercier J. NEVEU dont l'enseignement lumineux m'a orienté vers les probabilités, C. DELLACHERIE et X. FERNIQUE qui ont accepté de faire partie de mon jury, enfin l'espoir du ski américain et ami J.B. WALSH pour quelques conversations à bâtons rompus...

Références bibliographiques.

Chacun des courts chapitres composant ce travail possède sa bibliographie propre. Nous y ajouterons ici, comme bibliographie générale, trois articles qui compléteront utilement celui-ci.

E.B. DYNKIN. Wanderings of a Markov process. Theory of Prob. Vol.16, 1971, p. 401-408

(traduction anglaise de Teoriia Veroiatn).

R. GETTOOR et M. SHARPE. Last exit decompositions and distributions. A paraître

(Indiana J. of Math.).

B. MAISONNEUVE et P.A. MEYER. Ensembles aléatoires markoviens homogènes. A paraître

dans le vol.VIII du Séminaire de Probabilités de Strasbourg, Lecture

Notes in M. Springer-Verlag.

Ce dernier travail (consistant en cinq exposés) reprend les résultats de .GETOOR-SHARPE et DYNKIN, ainsi qu'une partie du présent article, mais il en diffère par la recherche du maximum de généralité, et l'emploi de techniques beaucoup plus lourdes (compactifications, ensembles analytiques,...).
