NICOLE EL KAROUI
HERVÉ REINHARD

Compactification et balayage de processus droits

Astérisque, tome 21 (1975)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__21__1_0>

INTRODUCTION

L'origine de ce travail est un article du cinquième Symposium de Berkeley (23) où Motoo étudie le problème suivant : soit G un ouvert dense dans S compact, décrire tous les processus dont le comportement avant qu'ils atteignent la frontière ∂G de G est le même que celui d'un processus minimal donné. L'outil principal est le balayage d'une fonctionnelle additive qui est probablement utilisé ici pour la première fois d'une façon essentielle. Cet article, généralisé d'ailleurs par Okabe (24) est d'un abord difficile surtout du fait que les méthodes puissantes de balayage développées depuis dans le cadre de la théorie générale des processus n'étaient évidemment pas à la disposition des auteurs ; par ailleurs les résultats sont relativement limités, notamment, parce qu'il n'a pas été fait usage de techniques de compactification qui sont à notre sens à la fois les plus naturelles et les plus aptes à donner une description aussi complète que possible du comportement du processus au voisinage de la frontière. Un pas important a été franchi lorsqu'on a pris conscience de l'importance des derniers temps de passage et de leur lien avec les techniques de balayage, Chung dans le cas des chaînes et Azema dans le cadre de la théorie générale ont mis en place des outils particulièrement adaptés à l'étude du problème de Motoo Getoor et Sharpe (11) ont approfondi cette correspondance : ils ont d'abord mis en évidence une loi d'entrée pour le semi-groupe du processus minimal. Ensuite, considérant $L(t)$ le dernier temps de passage avant t dans un ensemble F (fixé une fois pour toute et qui joue le rôle de ∂G), h et Φ des fonctions boréliennes bornées ils ont montré comment calculer $E_x[Z_{L(t)}\, h(X_t) \; ; \; 0 < L(t) < t]$ et $E_x[Y_{L(t)} \; \Phi(X_{L(t)}, X_t); 0 < L(t) < t]$ où Z est bien mesurable et Y prévisible. Ces résultats, fort important par eux-mêmes, conduisent à des "last exit decompositions" qui sont en fait des décompositions du semi-groupe d'un processus prolongeant le processus minimal. Ces formules améliorent considérablement une formule de Motoo qui donnait une décomposition des résolvantes. Des résultats très liés aux précédents sont des formules de conditionnement par rapport aux tribus $\mathcal{F}_{L(t)}$ et $\mathcal{F}^-_{L(t)}$. Les résultats sont d'ailleurs analogues aux résultats antérieurs de Pittenger et Shih (25). Meyer (17) a repris cet article pour le présenter dans un cadre tout à fait général et a introduit la notion d'ensemble homogène : nous avons repris cette présentation et conservé les notations. Pour plus de clarté nous avons même reproduit aux chapitres I et II tous les éléments nécessaires à la compréhension de la suite.

Notre travail -contemporain de celui de Getoor et Sharpe- a une orientation nettement différente : nous nous sommes surtout préoccupés de décrire le comportement du processus au voisinage de la frontière. A cette fin nous avons introduit d'une façon qui nous semble naturelle des processus prolongeant le processus minimal ou un sous-processus de celui-ci. L'introduction et l'étude de ces processus est une des parties les plus importantes et les plus originales de ce travail, nous avons essayé de les rendre intuitives d'une part en soulignant le rôle d'une certaine famille de temps d'arrêt (les $g + \varepsilon$ du chapitre I) d'autre part en donnant une formule explicite de densité de certaines fonctionnelles additives (voir chapitre X). On obtient en particulier des renseignements relatifs à la façon dont un processus prolongeant le processus minimal repart de la frontière, notamment en étudiant la limite $X_{L(t)+\varepsilon}$ quand $\varepsilon \to 0$ ou le support de la loi de X_t quand t tend vers zéro, toutes ces limites étant prises dans une nouvelle topologie obtenue par compactification de Ray. On obtient également des théorèmes d'intégration plus généraux que ceux de Getoor et Sharpe ainsi que de nouvelles formules de conditionnement (en plus des leurs que nous retrouvons), les noyaux figurant dans ces formules ayant une interprétation relativement aux semi-groupes des processus introduits.

L'utilisation d'une compactification -mais par rapport à une résolvante- avait été introduite par Dynkin [8] dans un article complètant celui d'Okabe, puis dans un article plus récent en Russe aux Teoria de 1971.

Dans le cas particulier où l'étude se ramène à celle d'un processus sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ ou sur une variété à bord des travaux anciens (Sato-Ueno 1965, Bony-Courrège-Priouret 1967, Priouret 1968) s'attachaient surtout à l'étude des semi-groupes de Feller ou d'un processus associé dont le générateur était donné, ainsi qu'à la mise en évidence de certains opérateurs frontières limitant le domaine du générateur et qui sont liés au processus sur le bord et au comportement du processus au voisinage de la frontière (condition de Waldenfels par exemple). Ces travaux ont d'ailleurs été développés plus récemment. Nous avons essayé, dans le cadre abstrait de l'article de Motoo de mettre en évidence des opérateurs comparables, pour cela nous étendons la définition du générateur d'un processus quelconque ainsi que celle d'un processus sur un domaine avec bord (nous utilisons à cet effet la notion d'opérateur presque positif de Mokobodski) et nous trouvons une formule analogue à celle de Waldenfels faisant intervenir un opérateur qui a "presque" le principe du maximum sur le bord. Une application de ces résultats à $\mathbb{R}^n$ permet de généraliser un théorème classique sur les processus de réflexion.

Avant de faire un résumé de chaque chapitre il convient de préciser les liens qui peuvent exister entre notre travail et la Thèse de B. Maisonneuve (14). Quand Meyer a étudié l'article de Getoor et Sharpe il avait présent à l'esprit cette thèse et il s'est aperçu qu'il pouvait utiliser certains des outils et des résultats pour répondre à des questions qu'il s'était posé relativement à des généralisations de théorèmes de Getoor et Sharpe. Nous répondons nous aussi à ces questions et à d'autres pour lesquelles Meyer n'avait pas de réponse, sans faire appel aux théorèmes sur le "processus d'incursion" de Maisonneuve et d'une façon qui nous semble beaucoup plus naturelle.

Nous allons maintenant donner une idée de chaque chapitre.

Chapitre I (p. 12). On introduit les notations de P.A. Meyer. Un fermé aléatoire ho-