Astérisque

JEAN LANNES
FRANÇOIS LATOUR

Forme quadratique d'enlacement et applications

Astérisque, tome 26 (1975)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__26__1_0>

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION (*)

Variétés et formes bilinéaires.

Soit M une variété différentiable compacte orientée sans bord de dimension n.

Dans le cas où n est pair, $n = 2\ell$, notons $L_\ell(M)$ la partie libre du groupe d'homologie $H_\ell(M;\mathbb{Z})$; le groupe $L_\ell(M)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini. La forme d'intersection de la variété M est une forme bilinéaire $(-1)^\ell$-symétrique :

$$L_\ell(M) \times L_\ell(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(x,y) \longmapsto x.y$$

Cette forme peut être définie à l'aide du cup-produit en cohomologie :

$$H^\ell(M;\mathbb{Z}) \otimes H^\ell(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2\ell}(M;\mathbb{Z}) \quad .$$

La théorie de la dualité de Poincaré (1900) montre qu'elle est non dégénérée c'est-à-dire qu'elle induit un isomorphisme du module $L_\ell(M)$ sur son dual $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}[L_\ell(M),\mathbb{Z}]$. Quand ℓ est impair on considère également la forme (symétrique) d'intersection modulo 2 :

$$H_\ell(M;\mathbb{Z}/2) \times H_\ell(M;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \quad .$$

Elle est encore non dégénérée.

Dans le cas où n est impair, $n = 2\ell + 1$, notons $T_\ell(M)$ la partie de torsion de $H_\ell(M;\mathbb{Z})$, c'est un groupe abélien fini. La forme d'enlacement de M est une forme $(-1)^{\ell+1}$-symétrique :

$$T_\ell(M) \times T_\ell(M) \xrightarrow{e} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad .$$

Cette forme peut être définie à l'aide du cup-produit suivant :

$$H^\ell(M;\mathbb{Z}) \otimes H^{\ell+1}(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2\ell+1}(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad .$$

Elle est toujours non dégénérée (dualité de Poincaré) c'est-à-dire qu'elle induit un

---

(*) L'éditeur remercie les auteurs d'avoir fait précéder leur texte d'une introduction qui permettra au lecteur non spécialiste de placer ce travail dans sa perspective historique.

isomorphisme du groupe fini $T_\ell(M)$ sur son dual de Pontryagin $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}[T_\ell(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$.

Cobordisme et groupes de Witt.

On distingue quatre cas suivant la classe de la dimension n de M modulo 4, dans deux d'entre eux les formes ci-dessus conduisent à des invariants de cobordisme.

1) $n = 4k$. On dit que le $\mathbb{Z}$-module $L_{2k}(M)$ muni de la forme bilinéaire symétrique d'intersection est un b-module. Si M est une variété-bord, $L_{2k}(M)$ est un b-module neutre : il contient un facteur direct qui est son propre orthogonal ; on obtient donc un invariant de cobordisme en considérant la classe du b-module $L_{2k}(M)$ dans le groupe de Witt $W(\mathbb{Z})$ qui est grosso modo la collection de tous les b-modules sur $\mathbb{Z}$ modulo la collection des b-modules neutres. Comme l'homomorphisme de signature $W(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, l'invariant défini précédemment n'est pas autre chose qu'un entier relatif, noté $I(M)$, qu'on appelle la signature de la variété M (Thom 1950).

2) $n = 4k + 2$. On a cette fois un b-espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2$ à savoir $H_{2k+1}(M;\mathbb{Z}/2)$. Malheureusement quand M est orientée ce b-espace est neutre.

3) $n = 4k - 1$. On dit que le groupe abélien fini $T_{2k-1}(M)$ muni de la forme d'enlacement (symétrique) est un e-module sur $\mathbb{Z}$; un e-module est neutre s'il contient un sous-module qui est son propre orthogonal. Le groupe de Witt $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ correspondant à ces notions est encore, grosso modo, la collection de tous les e-modules sur $\mathbb{Z}$ modulo la collection des e-modules neutres. La classe du e-module $T_{2k-1}(M)$ dans $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ n'est pas invariante par un cobordisme ordinaire, plus précisément toute classe de $W(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ peut être représentée par une variété bord.

4) $n = 4k + 1$. Le groupe de Witt adéquat est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$, la classe de $T_{2k}(M)$ dans ce groupe est l'invariant de cobordisme de De Rham.

Variétés stablement trivialisées et formes quadratiques.

On suppose maintenant que la variété M est munie d'une trivialisation stable t de son fibré tangent τ_M . C'est-à-dire qu'on se donne un isomorphisme t de la somme de Whitney $\tau_M \oplus \epsilon^p$ sur ϵ^{n+p} , ϵ^m désignant le fibré trivial de dimension m.