

# *Astérisque*

JEAN LANNES

FRANÇOIS LATOUR

**Forme quadratique d'enlacement et applications**

*Astérisque*, tome 26 (1975)

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1975\\_\\_26\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__26__1_0)

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION .....	3
CHAPITRE I. Fibrations stables et $SG_{(2)}$ - trivialisations .....	12
CHAPITRE II. Enlacement rationnel .....	18
CHAPITRE III. Construction d'une forme quadratique associée à la forme d'enlacement d'une variété de dimension $4k-1$ , $SG_{(2)}$ - trivialisée .....	27
CHAPITRE IV. Changement de trivialisations .....	44
CHAPITRE V. Construction sur une flèche .....	51
CHAPITRE VI. Relations entre la forme d'intersection rationnelle d'une variété de dimension $4k$ et la forme d'enlace- ment de son bord ou la forme quadratique d'enlacement de son bord, dans le cas où ce dernier est $SG_{(2)}$ - trivialisé .....	54
CHAPITRE VII. Invariant $\lambda$ et applications .....	62
CHAPITRE VIII. $(A, A')$ - sphères .....	74
APPENDICE. Formule de Milgram .....	86
BIBLIOGRAPHIE .....	88
SUMMARY .....	89



INTRODUCTION (\*)

Variétés et formes bilinéaires.

Soit  $M$  une variété différentiable compacte orientée sans bord de dimension  $n$ .

Dans le cas où  $n$  est pair,  $n = 2\ell$ , notons  $L_\ell(M)$  la partie libre du groupe d'homologie  $H_\ell(M; \mathbb{Z})$ ; le groupe  $L_\ell(M)$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang fini. La forme d'intersection de la variété  $M$  est une forme bilinéaire  $(-1)^\ell$ -symétrique :

$$\begin{aligned} L_\ell(M) \times L_\ell(M) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

Cette forme peut être définie à l'aide du cup-produit en cohomologie :

$$H^\ell(M; \mathbb{Z}) \otimes H^\ell(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2\ell}(M; \mathbb{Z}) .$$

La théorie de la dualité de Poincaré (1900) montre qu'elle est non dégénérée c'est-à-dire qu'elle induit un isomorphisme du module  $L_\ell(M)$  sur son dual  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}[L_\ell(M), \mathbb{Z}]$ .

Quand  $\ell$  est impair on considère également la forme (symétrique) d'intersection modulo 2 :

$$H_\ell(M; \mathbb{Z}/2) \times H_\ell(M; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 .$$

Elle est encore non dégénérée.

Dans le cas où  $n$  est impair,  $n = 2\ell + 1$ , notons  $T_\ell(M)$  la partie de torsion de  $H_\ell(M; \mathbb{Z})$ , c'est un groupe abélien fini. La forme d'enlacement de  $M$  est une forme  $(-1)^{\ell+1}$ -symétrique :

$$T_\ell(M) \times T_\ell(M) \xrightarrow{e} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .$$

Cette forme peut être définie à l'aide du cup-produit suivant :

$$H^\ell(M; \mathbb{Z}) \otimes H^{\ell+1}(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2\ell+1}(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) .$$

Elle est toujours non dégénérée (dualité de Poincaré) c'est-à-dire qu'elle induit un

(\*) L'éditeur remercie les auteurs d'avoir fait précéder leur texte d'une introduction qui permettra au lecteur non spécialiste de placer ce travail dans sa perspective historique.

## FORME QUADRATIQUE D'ENLACEMENT

isomorphisme du groupe fini  $T_{2k}(M)$  sur son dual de Pontryagin  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}[T_{2k}(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ .

### Cobordisme et groupes de Witt.

On distingue quatre cas suivant la classe de la dimension  $n$  de  $M$  modulo 4, dans deux d'entre eux les formes ci-dessus conduisant à des invariants de cobordisme.

1)  $n = 4k$ . On dit que le  $\mathbb{Z}$ -module  $L_{2k}(M)$  muni de la forme bilinéaire symétrique d'intersection est un  $b$ -module. Si  $M$  est une variété-bord,  $L_{2k}(M)$  est un  $b$ -module neutre : il contient un facteur direct qui est son propre orthogonal ; on obtient donc un invariant de cobordisme en considérant la classe du  $b$ -module  $L_{2k}(M)$  dans le groupe de Witt  $W(\mathbb{Z})$  qui est grosso modo la collection de tous les  $b$ -modules sur  $\mathbb{Z}$  modulo la collection des  $b$ -modules neutres. Comme l'homomorphisme de signature  $W(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  est un isomorphisme, l'invariant défini précédemment n'est pas autre chose qu'un entier relatif, noté  $I(M)$ , qu'on appelle la signature de la variété  $M$  (Thom 1950).

2)  $n = 4k + 2$ . On a cette fois un  $b$ -espace vectoriel sur  $\mathbb{Z}/2$  à savoir  $H_{2k+1}(M; \mathbb{Z}/2)$ . Malheureusement quand  $M$  est orientée ce  $b$ -espace est neutre.

3)  $n = 4k - 1$ . On dit que le groupe abélien fini  $T_{2k-1}(M)$  muni de la forme d'enlacement (symétrique) est un  $e$ -module sur  $\mathbb{Z}$  ; un  $e$ -module est neutre s'il contient un sous-module qui est son propre orthogonal. Le groupe de Witt  $W(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$  correspondant à ces notions est encore, grosso modo, la collection de tous les  $e$ -modules sur  $\mathbb{Z}$  modulo la collection des  $e$ -modules neutres. La classe du  $e$ -module  $T_{2k-1}(M)$  dans  $W(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$  n'est pas invariante par un cobordisme ordinaire, plus précisément toute classe de  $W(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$  peut être représentée par une variété bord.

4)  $n = 4k + 1$ . Le groupe de Witt adéquat est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2$ , la classe de  $T_{2k}(M)$  dans ce groupe est l'invariant de cobordisme de De Rham.

### Variétés stablement trivialisées et formes quadratiques.

On suppose maintenant que la variété  $M$  est munie d'une trivialisations stable  $t$  de son fibré tangent  $\tau_M$ . C'est-à-dire qu'on se donne un isomorphisme  $t$  de la somme de Whitney  $\tau_{\nu} \oplus \epsilon^p$  sur  $\epsilon^{n+p}$ ,  $\epsilon^m$  désignant le fibré trivial de dimension  $m$ .