Astérisque

LUCIEN (RESPONSABLE) SPZIRO
MIREILLE DESCHAMPS
RENÉE LEWIN-MENEGAUX
LUCIEN SZPIRO
MARGUERITE FLEXOR
ROBERT FOSSUM
ARNAUD BEAUVILLE
LAURENT MORET-BAILLY

Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux

Astérisque, tome 86 (1981)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__86__R1_0>

INTRODUCTION

Le séminaire de géométrie algébrique, dirigé par L. Szpiro, qui s'est réuni à l'E.N.S. rue d'Ulm, en 1979 et 80, a été consacré à l'étude des familles algébriques de courbes. L'ensemble des résultats qui y ont été exposés est regroupé dans ce volume d'Astérisque. Certains énoncés et certaines démonstrations ont toutefois été améliorés depuis les exposés oraux. On trouve, d'ailleurs, une version abrégée et plus ancienne des chapitres 2 à 5 dans l'exposé de Szpiro au colloque de Rennes (Astérisque vol.64).

Nous présenterons, d'abord, l'aspect diophantien des théorèmes qui sont au centre de ce volume. Nombre de résultats, auxiliaires pour cette partie, mais intéressants en eux-mêmes, concernent la géométrie des surfaces. (C'est en caractéristique positive qu'on a des énoncés nouveaux dont l'analogue sur $\mathbb{C}$ était dû à Arakelov).

Soient k un corps algébriquement clos et K le corps des fonctions rationnelles sur une courbe B projective lisse sur k. Etant donnée une courbe X_K projective lisse sur K (de genre au moins 2 dans la suite), on sait qu'on peut trouver une surface X projective lisse sur k, munie d'une fibration $f : X \longrightarrow B$ dont la fibre générique est X_K. Et une telle fibration est unique si l'on impose en outre qu'elle soit relativement minimale.

L'ensemble (fini) des points de B où la fibre de f est singulière s'appelle alors le lieu de mauvaise réduction de X_K.

Quitte à faire une extension finie K' de K, on peut supposer que X_K a réduction semi-stable (i.e. que les fibres singulières de f sont réduites à singularités quadratiques ordinaires). La démonstration, publiée ici, du théorème de réduction semi-stable (chap. 1) apporte quelques précisions dues à J.-F. Boutot au texte initial d'Artin-Winters (référence à la fin du chap. 1). Le lien avec la réduction semi-stable de la jacobienne de X_K y est fait et, par ce biais on obtient des renseignements sur l'extension K'/K convenable. Les conjectures suivantes sont classiques :

Conjecture de Shafarevich (pour les corps de fonctions) : Etant donné un ensemble fini S , de points de B , l'ensemble des courbes X_K , de genre g , non isotriviales (essentiellement : non définies sur k) et ayant bonne réduction en dehors de S est fini.

Conjecture de Mordell (pour les corps de fonctions) : Si la courbe X_K est non isotriviale l'ensemble $X_K(K)$ de ses points rationnels sur K est fini.

Ces conjectures ont été démontrées par Parshin et Arakelov (voir référence à la fin du chap. 3 de ce volume) lorsque la caractéristique de k est nulle. On démontre ici (Thm. 7 exposé 3) la conjecture de Shafarevich en toute caractéristique pour des courbes X_K admettant réduction semi-stable sur B . On montre ensuite qu'il est facile de se débarrasser de l'hypothèse de semi-stabilité en caractéristique zéro mais qu'elle est indispensable en caractéristique positive (cf. exemple après le théorème 7 loc. cit.). On établit ensuite la conjecture de Mordell, en suivant une méthode esquissée par Parshin pour déduire "Mordell" de "Shafarevich".

Un résultat auxiliaire essentiel est le suivant. Si $f : X \longrightarrow B$ est une fibration semi-stable non isotriviale, alors le faisceau dualisant relatif $\omega_{X/B}$ est numériquement positif (et ample sur le modèle stable). Si k est de caractéristique nulle, le vanishing théorème de Ramanujan-Kodaira implique alors la nullité de $H^1(X,\omega_{X/B}^{-1})$. Mumford avait donné des exemples de surfaces normales, puis Raynaud de surfaces lisses, sur un corps de caractéristique $p > 0$, munies d'un faisceau ample L tel que $H^1(X,L^{-1})$ soit non nul. De nouveaux contre-exemples au "vanishing" de Kodaira sont construits dans l'exposé 4. Toutefois l'exposé 2 est consacré à la démonstration d'un théorème d'annulation de cohomologie, qui admet comme corollaire immédiat $H^1(X,\omega_{X/B}^{-1}) = 0$ si $X \xrightarrow{f} B$ est une fibration semi-stable non isotriviale.

Ce théorème d'annulation est utilisé à plusieurs reprises au cours de l'exposé 3 et permet en particulier d'établir la "rigidité" des familles semi-stables (Thm. 6) point essentiel pour démontrer la finitude (Thm. 7).

En termes approchés la rigidité signifie ceci. Soient V un espace de paramètres (connexe) et $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} B \times V$ tel que pour tout point

$v \in V$, f induise $f_v : X_v \longrightarrow B \times \{v\}$ fibration semi-stable à mauvaise réduction contenue dans $S \subset B$ alors la fibration f_v ne dépend pas du point v .

Les exposés 7 et 8 sont indépendants des chapitres précédents. L. Moret-Bailly construit une famille non constante de variétés abéliennes principalement polarisées, sur $\mathbb{P}^1_k$, pour tout corps k de caractéristique > 2 . (On sait que tout schéma abélien sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est constant). Le schéma abélien construit par L. Moret Bailly est la jacobienne d'une famille semi-stable de courbes de genre 2 sur $\mathbb{P}^1_k$ dont les fibres singulières sont formées de 2 courbes elliptiques se coupant transversalement en un point. Notons qu'il n'existe pas de famille lisse non constante de courbes de genre supérieur ou égal à 1 sur $\mathbb{P}^1_k$: Si $k = \mathbb{C}$ et sans hypothèse de semi-stabilité il y a au moins 3 fibres singulières. Si on suppose la famille semi-stable et toujours en caractéristique 0 , A. Beauville montre (exposé 6) qu'il y a au moins 4 fibres singulières. Si le corps de base est de caractéristique $p \geqslant 0$ une famille semi-stable de genre au moins 2 sur $\mathbb{P}^1$ a au moins 3 fibres singulières (chap. 3).

Il reste à mentionner qu'on construit au chapitre 5 des surfaces projectives lisses sur un corps de caractéristique > 0 sur lesquelles il existe des formes différentielles globales non fermées (les premiers exemples étaient dus à D. Mumford).

En guise de conclusion, rappelons qu'on peut étendre dans deux directions, le sujet de ce séminaire d'une part en considérant des familles de variétés abéliennes, d'autre part, en prenant pour K un corps de nombres.

1) Soient d'abord K et B comme précédemment, S un ensemble fini de points de B , g et n deux entiers (n premier à la caractéristique). L'ensemble des variétés abéliennes sur K , de dimension g , munies d'une polarisation de degré n , ayant réduction semi-stable sur K , et bonne réduction en dehors de S , est-il fini ? Dans cette direction, L. Szpiro et L. Moret Bailly, savent montrer que si S est vide, et si on fixe aussi le degré du fibré tangent relatif, restreint à la section nulle, alors l'ensemble des schémas abéliens $X \longrightarrow B$

(de dimension g , munis d'une polatisation de degré n) forme une famille limitée. Mais il manque par exemple un énoncé de "rigidité" pour obtenir la finitude.

2) Soient maintenant K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K , et g un entier $\geqslant 2$.

a) Conjecture de Mordell : Soit X une courbe de genre g lisse sur K . Alors l'ensemble des points de X rationnels sur K est fini.

Le point sur cette question est fait dans les textes de J.-P. Serre "Autour du Théorème de Mordell-Weil I, II" résumé d'un cours au Collège de France Janvier-Mars 1980, Octobre-Décembre 1980.

b) Conjecture de Shafarevich : L'ensemble des courbes de genre g projectives lisses sur K , ayant bonne réduction en dehors de S est fini.

On sait démontrer cette conjecture en genre 2 (par exemple Parshin : "Minimal models of curves of genus 2..." Math. USSR Isv. vol. 6 1972) et de façon générale pour les courbes hyperelliptiques (ou pour les courbes elliptiques).

c) Existe-t-il des familles de courbes de genre g lisses sur Spec $\mathbb{Z}$?

d) On ne connait pas non plus (bien sûr), l'analogue de b) pour les variétés abéliennes. Même l'énoncé suivant est conjectural : L'ensemble des variétés abéliennes de dimension 2, sur K principalement polarisées, et ayant bonne réduction en dehors de S est fini.

Renée Elkik