Astérisque

MOHAMED HACHMI SLIMAN

Théorie de Mackey pour les groupes adéliques

Astérisque, tome 115 (1984)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__115__1_0>

Père,
de là-haut des étoiles,
je le sens,
tu me vois.
Je te dédie ce travail,
c'est à toi
que je le dois .

Introduction

Soit $\mathbb{Q}$ le corps des rationnels et $\mathcal{P}$ l'ensemble de ses places formé de ∞ et de tous les nombres premiers 2,3,5,...Soit G un groupe linéaire algébrique défini sur $\mathbb{Q}$, G_p le groupe de ses $\mathbb{Q}_p$-points, p parcourant $\mathcal{P}$,et $G_{\mathbb{A}}$ le groupe de ses adèles . On identifie le groupe $G_{\mathbb{Q}}$ des $\mathbb{Q}$-points de G au sous-groupe discret des adèles principales du groupe $G_{\mathbb{A}}$.

Le présent travail se fixe comme but d'analyser la représentation régulière du groupe $G_{\mathbb{A}}$ dans $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$,en ramenant sa décomposition au cas réductif,cas qui a fait l'objet de nombreux travaux . Ceci va être accompli en différentes étapes .

La première étape consiste à développer une théorie de Mackey pour le groupe adèle $G_{\mathbb{A}}$. Cette dernière se heurte à un problème sérieux: naturellement,pour faire fonctionner la méthode des petits groupes de Mackey,nous partons du groupe adèle d'un sous-groupe algébrique unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ invariant, U ,de G . Le problème est qu'il n'est de type I que lorsqu'il est abélien . Pour l'éviter,vu le but que nous nous sommes fixé,nous travaillons,en fait,non pas avec tout le dual de $U_{\mathbb{A}}$, mais seulement avec le spectre de $L^2(U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}})$ qui,du fait que le quotient $U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}}$ est compact,est formé de représentations c.c.r.(completly contińious representation) .

Désignons par $\underline{u}$ l'algèbre de Lie algébrique de U et par $\underline{u}^*$ son dual . Le spectre de $L^2(U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}})$ est paramétré par C.C.Moore {Moo2}$^{\sim}$ par l'ensemble des orbites dans $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$ sous l'action coadjointe de $U_{\mathbb{Q}}$ comme suit . Soit θ une telle orbite . La représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ associée est le produit tensoriel infini des représentations $\pi_{p,\theta}$ des groupes U_p ,associées par la méthode des orbites de Kirillov à θ ,restreint à la direction $\mathcal{X}^{\mathbb{Z}_p}_{p,\theta}$ formée,pour presque tout p premier , des vecteurs dans l'espace $\mathcal{X}_{p,\theta}$ de $\pi_{p,\theta}$,laissés fixes(via $\pi_{p,\theta}$)par le groupe $U_{\mathbb{Z}_p}$ des points p-adiques de U . Ceci étant rappelé,on fixe un élément

$\sim$:*Voir références* .

u^* de θ . Le calcul de l'obstruction à étendre la représentation $\pi_{p,\theta}$ de U_p à G_p montre que {L.P.ou Du3} celle-ci ne dépend que de la structure symplectique naturelle sur le quotient $\underline{u}/\underline{u}(u^*)$ et est représentée par un 2-cocycle d'ordre deux sur $G_p(u^*)$ .Désignons par $G_p^{u^*}$ l'extension centrale d'ordre deux de $G_p(u^*)$ associée à ce 2-cocycle et par S_{p,u^*} la représentation métaplectique de Weil de $G_p^{u^*}$ résultant . Notre calcul de l'obstruction à étendre la représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ de $U_{\mathbb{A}}$ à $G_{\mathbb{A}}$ donne lieu à une représentation de Weil d'une extension d'ordre deux centrale du groupe $G_{\mathbb{A}}(u^*)$,s'exprimant comme un produit tensoriel infini restreint des représentations S_{p,u^*} (de $G_p^{u^*}$ dans $\mathcal{H}_{p,\theta}$) dans un sens à préciser :

Les résultats de A.Weil{We2} permettent de relever,d'une manière unique,pour presque tout p premier,le groupe $G_{\mathbb{Z}_p}(u^*)$ à $G_p^{u^*}$ de sorte que l'action du groupe $G_{\mathbb{Z}_p}(u^*)$,via S_{p,u^*} ,dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\theta}$ soit triviale . D'où un produit infini des groupes $G_p^{u^*}$ restreint à la gerbe des compacts $G_{\mathbb{Z}_p}(u^*)$,noté $G_{\mathcal{P}}^{u^*}$,et une représentation unitaire du groupe $G_{\mathcal{P}}^{u^*}$,produit tensoriel infini des représentations S_{p,u^*} (de $G_p^{u^*}$ dans $\mathcal{H}_{p,\theta}$)restreint à la direction $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\theta}$,notée $S_{\mathcal{P},u^*}$. Signalons que pour tout p dans $\mathcal{P}$,-1 opère par multiplication par -1 via S_{p,u^*} de sorte que la représentation $S_{\mathcal{P},u^*}$ est triviale sur le sous-groupe discret central Σ_+ de $G_{\mathcal{P}}^{u^*}$ formé des suites (c_p) vérifiant $c_p=1$ ou -1 , $c_p=1$ pour presque tout p dans $\mathcal{P}$ et le produit de tous les c_p vaut 1 . Le quotient $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$ de $G_{\mathcal{P}}^{u^*}$ par Σ_+ est un revêtement central d'ordre deux de $G_{\mathbb{A}}(u^*)$ et la représentation $S_{\mathcal{P},u^*}$ passe au quotient et donne lieu à une représentation unitaire $S_{\mathbb{A},u^*}$ de $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$,dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}$ de $\pi_{\mathbb{A},\theta}$,valant -1 en -1 .C'est la représentation métaplectique de Weil adélique . Tensorisée par $\pi_{\mathbb{A},\theta}$, elle donne lieu à une représentation unitaire,notée $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u^*}$,du produit semi-direct naturel $U_{\mathbb{A}}\times G_{\mathbb{A}}^{u^*}$ dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}$ prolongeant la représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}$. Ceci étant,pour chaque représentation unitaire E de $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$,valant -1 en -1 et dont la restriction au groupe $U_{\mathbb{A}}(u^*)$ (qui se relève canoniquement à $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$)est un multiple du caractère unitaire associé à la restriction de u^* à $\underline{u}(u^*)$,la représentation unitaire $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u^*}\otimes E$ passe au quotient et donne lieu à une représentation du stabilisateur $U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u^*)$ de $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ dans $G_{\mathbb{A}}$. Notons $I_{u^*,E}$ l'induite unitaire de la représentation ainsi obtenue du groupe $U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u^*)$ au groupe $G_{\mathbb{A}}$ .La conclusion(§3.3)$^{\sim}$de la méthode des petits groupes est :

$\sim$ *réfère au chapitre 3 paragraphe 3 du présent document* .