Astérisque

Yves Félix

La dichotomie elliptique - Hyperbolique en homotopie rationnelle

Astérisque, tome 176 (1989)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1989__176__1_0>

© Société mathématique de France, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

176 ASTÉRISQUE

1989

LA DICHOTOMIE ELLIPTIQUE - HYPERBOLIQUE EN HOMOTOPIE RATIONNELLE

Yves FÉLIX

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. subjects Classification : 55 P 62, 55 P 50, 55 P 15, 55 P 35

INTRODUCTION

Les groupes d'homotopie $\pi_i(X)$ d'un c.w. complexe fini 1-connexe sont des groupes abéliens finiment engendrés. Ils s'écrivent donc sous la forme

$$\pi_i(X) = \mathbf{Z}^{n_i} \oplus T_i \ ,$$

où T_i est un sous-groupe fini. n_i est alors la dimension de l'espace vectoriel $\pi_i(X) \otimes \mathbf{Q}$.

Les c.w. complexes finis 1-connexes X se répartissent ainsi de manière naturelle en deux classes distinctes : les elliptiques et les hyperboliques, les premiers étant caractérisés par le fait que les entiers n_i sont presque tous nuls. Cette dichotomie naïve est fondamentale. Sa description est le sujet de ce texte.

Les espaces elliptiques et hyperboliques ont des propriétés très différentes. Etre elliptique est une condition très forte. Nous verrons au paragraphe 5 que la caractéristique d'Euler d'un espace elliptique est toujours positive ou nulle, et que sa cohomologie satisfait à la dualité de Poincaré. De plus, si X est elliptique, on a $\sum_i \dim \pi_i(X) \otimes \mathbf{Q} \leq 2\,\mathrm{cat}(X)$, $\mathrm{cat}(X)$ désignant la catégorie de Lusternik-Schnirelman (la définition est rappelée ci-dessous).

Les premières propriétés des espaces hyperboliques concernent le caractère asymptotique de cette suite n_i.

Théorème 1. *Si X est un c.w. complexe fini 1-connexe, hyperbolique, la suite $\sum_{i=1}^{r} n_i$ a une croissance exponentielle.*

Rappelons de quoi il s'agit. On distingue différents types de croissance. Une suite n_i est dite à *croissance polynomiale* d'ordre d s'il existe des nombres positifs c et d avec

$$n_r \leq c.r^d \quad \forall r \geq 1.$$

La suite n_i est dite à *croissance exponentielle* s'il existe un nombre réel $c > 1$ avec

$$n_r \geq c^r \quad \forall r \geq 1 \ .$$

La suite n_i est dite à *croissance intermédiaire* dans les autres cas.

La dichotomie se précise : si X est elliptique, le groupe $\pi_i(X)$ est fini pour presque tout i ; si X est hyperbolique, X contient "beaucoup" d'homotopie.

Pour chaque entier p, il existe un degré n tel que $\pi_n(X)$ contient $\mathbf{Z}^p$; la suite $\sum_{i=2}^{n} \dim \pi_i(X) \otimes \mathbf{Q}$ a une croissance exponentielle.

Cette dichotomie s'étend aux espaces de catégorie (de Lusternik-Schnirelmann) finie, et c'est là son cadre naturel. Un espace topologique X est dit de catégorie inférieure ou égale à n si et seulement si X peut être recouvert par $n+1$ ouverts contractiles dans X. Ainsi, par exemple, un C.W. complexe 1-connexe de dimension n est de catégorie inférieure ou égale à n. Introduit par Lusternik et Schnirelmann dans le contexte du calcul des variations, cet invariant numérique s'est avéré très utile en analyse et en topologie.

De tels théorèmes de dichotomie dans la croissance apparaissent aussi dans d'autres domaines des mathématiques, et notamment en théorie des groupes. Si G est un groupe engendré par $g_1, g_2, \ldots, g_n$, tout élément g de G peut être représenté par un mot $g_{i_1}^{\alpha_1} g_{i_2}^{\alpha_2} \ldots g_{i_p}^{\alpha_p}$; l'entier $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_p|$ est appelé la longueur du mot. Par définition, la norme de g (relativement à $g_1, \ldots, g_n$) est la longueur minimale des mots représentant g. On obtient ainsi une suite d'entiers b_n, où b_n désigne le nombre d'éléments de G de norme inférieure à n. La croissance de la suite b_n est appelée croissance du groupe. Posé en 1968 par Milnor, le problème de la croissance des groupes a pour premier résultat marquant le théorème de dichotomie de Tits (1972) : “Tout sous-groupe finiment engendré d'un groupe de Lie connexe a une croissance ou polynomiale, ou exponentielle”. Dès lors se pose le problème de l'existence d'un groupe à croissance intermédiaire. Il faut attendre jusqu'en 1983 (Grigorchuk) pour voir apparaître le premier exemple de groupe finiment engendré à croissance intermédiaire. Et aujourd'hui, le problème de l'existence d'un groupe de présentation finie à croissance intermédiaire est encore ouvert.

Pour démontrer le théorème de dichotomie, nous utiliserons les modèles minimaux de Sullivan. Les modèles minimaux sont des objets algébriques déterminés à isomorphisme près par le type d'homotopie rationnelle des espaces. Introduits au début des années 1970 à partir des travaux de Quillen et Sullivan, ils contiennent tous les invariants homotopiques rationnels des espaces.

Rappelons qu'un espace 1-connexe est dit rationnel si ses groupes d'homotopie sont des $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels. A chaque espace topologique 1-connexe X, on peut associer son rationalisé $X_{\mathbf{Q}}$. Il existe diverses constructions de $X_{\mathbf{Q}}$; nous les rappellerons au paragraphe 2 : $X_{\mathbf{Q}}$ est caractérisé à équivalence