NICOLAS BURQ

Pôles de diffusion engendrés par un coin

Astérisque, tome 242 (1997)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1997__242__1_0>

242 ASTÉRISQUE

1997

PÔLES DE DIFFUSION ENGENDRÉS PAR UN COIN

Nicolas BURQ

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Table des matières

I. Introduction

On se propose dans cet article de donner une localisation précise des pôles de diffusion dans un cas modèle pour le problème de Dirichlet à l'extérieur d'un obstacle contenant des coins et une trajectoire captive connectant ce coin à lui même. Précisons le problème étudié. On considère Θ un obstacle borné de $\mathbf{R}^2$, on note $\Omega = \Theta^c$ et on suppose que Ω est connexe. On note $R_\Omega(\lambda)$, la résolvante sortante du Laplacien avec conditions de Dirichlet, holomorphe dans $\mathrm{Im}\lambda < 0$, définie par la construction suivante. Soit $U_\Omega(t)$ le propagateur du problème

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)\, U_\Omega(t) f &= 0, \text{ dans } \Omega \times \mathbf{R}_t \\ U_\Omega(t) f \mid_{\partial\Omega} &= 0 \\ U_\Omega(t) f \mid_{t=0} &= 0 \\ \partial_t U_\Omega(t) f \mid_{t=0} &= f \in C_0^\infty(\Omega) \end{cases}$$

qu'on étend comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. L'opérateur $R_\Omega(\lambda)$ est défini par la relation :

$$R_\Omega(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} U_\Omega(t) dt,$$

pour tout $\lambda \in \{\mathrm{Im}\lambda < 0\}$.

Comme l'opérateur $U(t)$ est une contraction de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il est clair que cette relation définit une famille d'opérateurs bornés de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, holomorphe dans $\{\mathrm{Im}\lambda < 0\}$. Il est classique que la résolvante sortante R_Ω, considérée comme opérateur de $L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ dans $H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})$, holomorphe dans $\{\mathrm{Im}\lambda < 0\}$, s'étend en un opérateur méromorphe dans le revêtement simplement connexe de $\mathbf{C}^*$. Le problème qui nous intéresse est celui de la localisation des pôles de ce prolongement, qu'on appelle pôles de diffusion. L'intérêt de cette question est que ces pôles ont de multiples interprétations : outre le fait que ce sont les pôles de la résolvante, ce sont aussi les points pour lesquels il existe une solution sortante non triviale de l'équation

$$(\Delta + \lambda^2)\, u = 0 \; u \mid_{\partial\Omega} = 0 \; ; \tag{1.1}$$

ce sont également (en dimension impaire d'espace) les pôles de la matrice de diffusion (scattering) divisés par le complexe i et les valeurs propres du générateur infinitésimal du semi-groupe de Lax et Phillips. Enfin, si on a également des estimations sur la résolvante, ils permettent (en dimension d'espace impaire) de donner un développement asymptotique en grand temps pour les solutions de l'équations des ondes dans Ω du type

$$U(t)f = \sum_{\mathrm{Im}\lambda < C} e^{it\lambda}\Pi_\lambda(f) + \mathcal{O}\left(e^{-(C-\varepsilon)t}\right)$$

où Π_λ est le projecteur spectral sur la "fonction propre" associée au pôle λ vérifiant (1.1). Nous donnerons également dans cet article une version affaiblie de ce résultat (le théorème 4) vraie en dimension d'espace paire.

Dans un cadre C^∞ le problème de la localisation des pôles de diffusion a été étudié par de nombreux auteurs. Dans le cas où l'obstacle est non captif (c'est à dire que tout rayon issu d'une boule contenant l'obstacle et se réfléchissant sur l'obstacle selon les lois de l'optique géométrique sort en temps fini de cette boule), le résultat le plus frappant est certainement le suivant qui est une conséquence des résultats de R. Melrose et J. Sjöstrand [19] sur la propagation des singularités:

Théorème (R. Melrose J. Sjöstrand). — *Soit Θ un obstacle C^∞, non captif. Pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que la résolvante sortante du Laplacien avec conditions de Dirichlet dans Ω est holomorphe dans l'ensemble*

$$\{\lambda \in \mathbf{C};\ |Im\lambda| < N\log(|\lambda|);\ |\lambda| > C_N\} \cup \{Im\lambda < 0\}.$$

Par ailleurs en dehors de travaux de V. Petkov et L. Stoyanov [22, 23], le seul cas captif connu précisement est celui où $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$ avec Θ_i des convexes stricts de classe C^∞. La trajectoire captive est alors celle qui minimise la distance entre Θ_1 et Θ_2. Cette situation a été étudiée par M. Ikawa [13], [14], [12] (qui a aussi étudié le cas non strictement convexe) puis par C. Gérard [7]. Ces auteurs montrent que dans ce cas qui est celui pour lequel la trajectoire est "le moins captive possible" donc pour lequel les pôles seront le plus loin possible de l'axe réel, ces pôles se répartissent asymptotiquement sur des droites horizontales et C. Gérard donne un développement asymptotique explicite de tous les pôles dans les régions du type $\{\lambda \in \mathbf{C};\ \mathrm{Im}\lambda \leq C;\ C > 0\}$.

Théorème (C. Gérard). — *Il existe $\nu > 1$ tel que, pour tout $A > 0$, il existe $C > 0$ tel que, si on note $\lambda_{i,n} = n\frac{\pi}{d} + \sqrt{-1}\frac{i+1/2}{2d}\log(\nu)$, alors il existe des développements asymptotiques $a_{k,i}$ tels que les pôles situés dans la région*

$$\{\lambda \in \mathbf{C}; Im\lambda < A,\ |\lambda| > C\}$$

sont tous dans des boules

$$\left|\lambda - \left(\lambda_{i,n} + \sum_{N>k\geq 1} a_{i,k}\lambda_{i,n}^{-k}\right)\right| \leq C_N|\lambda_{i,k}|^N$$

et chaque boule en contient exactement un. (En toute rigueur, le résultat de C. Gérard est démontré en dimension impaire d'espace alors que nous l'énonçons ici en dimension 2, mais la démonstration est exactement la même et l'énoncé légèrement plus simple)

Nous allons étudier un cas modèle intermédiaire entre la situation non captive de R. Melrose et J. Sjöstrand et la situation de M. Ikawa et C. Gérard. Pour cela, il faut nécessairement sortir de la catégorie C^∞. Notre situation géométrique est la suivante : on considère $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$, un compact de $\mathbf{R}^2$. On suppose que le bord de l'obstacle Θ_1, $\partial\Theta_1$, est analytique et que $\partial\Theta_2$ est aussi analytique sauf en un point O au voisinage duquel il existe des fonctions a et b, analytiques au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, telles que localement Θ_2 est défini par l'équation $\Theta_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R};\ b(x) \leq y \leq a(x)$. On suppose également que les obstacles Θ_i sont strictement convexes. Il n'y a donc qu'une seule trajectoire captive dans l'ouvert $\Omega = (\Theta_1 \cup \Theta_2)^c$, celle qui minimise la distance entre Θ_1 et Θ_2. Enfin on suppose que cette trajectoire connecte le coin à un point de Θ_1, A, et que Θ_2 est strictement d'un seul coté de la normale à $[A, O]$ au point O (exceptée la dernière ces hypothèses pourraient être affaiblies en "Θ_1 pas trop concave au voisinage de A et $[A, O]$ est la seule trajectoire captive", supprimant l'hypothèse de convexité de Θ_i, mais ceci compliquerait inutilement l'article). On notera d la distance entre les obstacles Θ_1 et Θ_2.

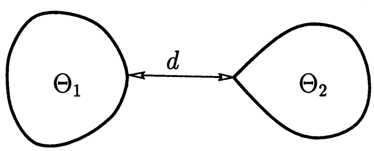

FIG. 1.1 – *Les obstacles*

Dans ce cadre la géométrie est dans un certain sens beaucoup plus favorable que dans le cas C^∞ étudié par C. Gérard et M. Ikawa. En effet une trajectoire captive de type hyperbolique (dans l'espace cotangent) possède une variété stable rentrante et une variété stable sortante alors qu'il est facile de voir que dans notre situation un rayon qui rebondit un nombre suffisament grand de fois (mais fixe) sur les obstacles a nécessairement rencontré le coin (et non pas un voisinage du coin comme dans le cas C^∞). Cette géométrie particulièrement favorable va nous permettre de donner un résultat plus complet que celui de C. Gérard et de calculer (presque) tous les pôles localisés sous une courbe logarithmique arbitraire $\{\lambda \in \mathbf{C};\ \mathrm{Im}\lambda \leq C\log(|\lambda|)\};\ C > 0\}$.

Le résultat principal que nous obtenons est le suivant:

Théorème 1. — *Pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que*

i) Il existe $C'_N > 0$, $M \leq N^2$, $(a_p, q_p)_{0 \leq p \leq M} \in \mathbf{C} \times \mathbf{Q}^+$ tels que, si on note, pour tout p, $(\lambda_{j,p})_{j \in \mathbf{Z}}$, la suite des solutions de l'équation

$$\frac{e^{-2i\lambda d}}{\lambda^{1/2+q_p}} = a_p,$$

qui vérifie alors

$$Re(\lambda_{j,p}) \sim j\frac{\pi}{d}\ ,\ Im(\lambda_{j,p}) \sim \frac{(1/2 + q_p)}{2d}\log(|j|)\,,$$

pour chaque p, il existe un developpement asymptotique $(b_{k,p})_{k \in \mathbf{N}}$, un exposant $r_p \in \mathbf{Q}_*^+$ tels que pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe C_m tel que chaque boule d'équation

$$\left|\lambda - \left(\lambda_{j,p} + \sum_{k=1}^{m}\left(\lambda_{j,p}^{-1/r_p}\right)^k b_{k,p}\right)\right| \leq C_m\,|\lambda_{j,p}|^{-(m+1)/r_p}$$

contient un pôle de diffusion (avec multiplicité si plusieurs de ces boules sont d'intersection non vide) et sur l'ensemble

$$\left\{ Im\lambda \leq \frac{N+1/2}{2d} \log\left(|\lambda|\right) - C'_N;\ |\lambda| \geq C_N \right\},$$

tous les pôles de diffusion sont dans une telle boule.

ii) Si on suppose q_p rangés par ordre croissant, $q_0 = 0$, $r_0 = 1$

$$a_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{d\left(1+d\kappa\right)}}e^{-i\pi/4}\Psi(\alpha,\theta),$$

où Ψ est une fonction analytique de α, l'angle extérieur au coin et de θ, l'angle entre le coin et la trajectoire captive et $q_1 \geq 1/2$.

$$\Psi\left(\alpha,\theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right)}{\alpha\sin\left(\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta+\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta-\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)}.$$

Cet énoncé montre que comme annoncé les pôles de diffusion se repartissent asymptotiquement sur des courbes logarithmiques.

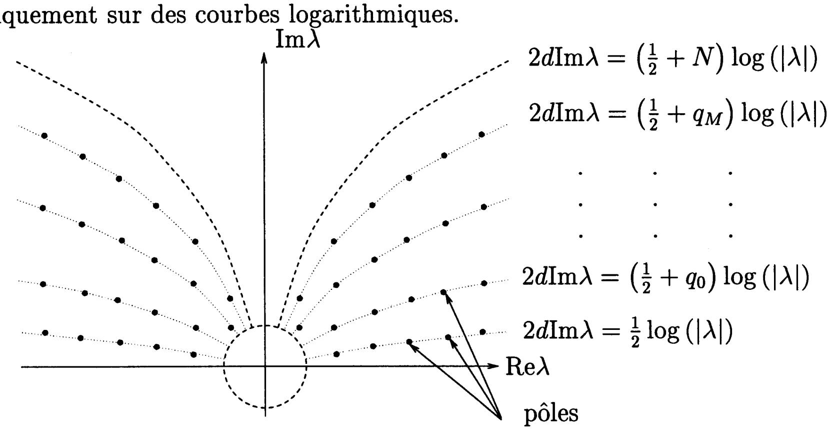

FIG. 1.2 – *Pôles situés sous une courbe $2dIm\lambda = \left(\frac{1}{2}+N\right)\log\left(|\lambda|\right)$.*

Remarque 1.1. — *Dans le cas où l'obstacle est de classe C^∞ la situation est très différente puisque, d'une part le résultat de R. Melrose et J. Sjöstrand montre que s'il n'y a pas de trajectoire captive il n'y a qu'un nombre fini de pôles sous toute courbe logarithmique, et d'autre part les résultats de C. Gérard et M. Ikawa montrent que s'il n'y a qu'une trajectoire captive de type hyperbolique alors on a une infinité de pôles à distance fixe de l'axe réel.*

Remarque 1.2. — *D'un point de vue numérique notre résultat est à rapprocher d'un résultat de O. Poisson [24] qui calcule numériquement les pôles de diffusion pour le problème de Neumann à l'extérieur d'une fissure rectiligne dans $\mathbf{R}^2$. En effet, l'ouvert possède aussi dans ce cas une unique trajectoire captive reliant un coin (dégénéré) à un* *autre (celle qui connecte une extrémité de la fissure à l'autre) et les calculs de O. Poisson (antérieurs à notre résultat) font clairement apparaitre des pôles de diffusion situés asymptotiquement sur des courbes logarithmiques (au moins pour les trois premières courbes), de manière remarquablement précise puisque la répartition asymptotique apparait pour des fréquences de l'ordre de* 5 *(si la longueur de la fissure est* 1*). Enfin on peut vérifier numériquement sur ces résultats la pente logarithmique en* $\frac{1}{4d}$ *de la première rangée de pôles qui est celle que notre résultat annonce (si on l'extrapole au cadre étudié par O. Poisson)*

La démonstration de ce résultat a été rendue possible par le calcul extrèmement précis de l'onde diffractée par un coin quand l'onde incidente est conormale analytique, réalisé par P. Gérard et G. Lebeau [8]. Notre démonstration repose de façon cruciale sur ces résultats. Le plan de l'article est le suivant. Dans une deuxième partie nous définissons des fronts d'onde Sobolev et Gevrey pour les solutions H^1 de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet dans un ouvert à coins et nous démontrons un théorème de propagation des singularités le long des rayons C^∞ ou analytiques selon le cas pour ces fronts d'onde. Dans la troisième partie nous démontrons un résultat analogue à celui de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [1] pour un ouvert à coins non captif, c'est à dire que dans ce cas la résolvante sortante tronquée admet un prolongement analytique sous un courbe inverse cubique $\mathrm{Im}\lambda < \varepsilon e^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}, |\lambda| > C$. La quatrième partie est consacrée à la construction des opérateurs associés au rebond microlocal le long de la trajectoire captive. Nous résolvons un problème de Grushin associé à ces opérateurs dans la cinquième partie. Dans la sixième partie nous calculons des développements asymptotiques pour les zéros d'une matrice qui résoud ce problème de Grushin, nous montrons qu'ils correspondent aux pôles de diffusion et nous démontrons le théorème 1. Enfin dans un appendice nous avons rassemblé des parties plus techniques ou en particulier nous établissons d'une part de façon systématique un lien entre front d'onde et ensemble de fréquence et d'autre part nous utilisons ce lien pour déduire à partir des résultats de propagation des singularités, des résultats de propagation des ensembles de fréquence.

Terminons cette introduction en remarquant que $R\left(-\overline{\lambda}\right) = \overline{R\left(\lambda\right)}$, ce qui nous permettra de limiter notre étude à l'ensemble $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

Remerciements. Je voudrais remercier J.M. Schlenker pour les discussions qui ont permis la rédaction de l'appendice D et tout particulièrement G. Lebeau qui m'a indiqué ce problème, pour les discussions que j'ai eues avec lui sur cet article.