

Astérisque

JEAN-LOUP WALDSPURGER

**Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour
les groupes classiques non ramifiés**

Astérisque, tome 269 (2001)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2001__269__1_0>

© Société mathématique de France, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ASTÉRIQUE 269

INTÉGRALES ORBITALES
NILPOTENTES ET ENDOSCOPIE
POUR LES GROUPES CLASSIQUES
NON RAMIFIÉS

Jean-Loup Waldspurger

Société Mathématique de France 2001

J.-L. Waldspurger

UMR 7586 du CNRS, Mathématiques, Université de Paris 7, 2 Place Jussieu,
F-75251 Paris cedex 05.

E-mail : waldspur@math.jussieu.fr

Url : <http://www.math.jussieu.fr/~waldspur>

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E35, 11F70, 20G40, 20G25.

Mots clefs. — Intégrales orbitales nilpotentes, stabilité, endoscopie, transfert.

INTÉGRALES ORBITALES NILPOTENTES ET ENDOSCOPIE POUR LES GROUPES CLASSIQUES NON RAMIFIÉS

Jean-Loup Waldspurger

Résumé. — Soit $\mathbf{G}$ un groupe classique non ramifié sur un corps local p -adique, p étant supposé « grand ». Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$. Notons $\mathcal{D}_{\text{nil}}^G$ l'espace des distributions invariantes sur $\mathfrak{g}(F)$ à support nilpotent. Notons $\mathcal{D}^{G,\text{st}}$ l'espace des distributions stablement invariantes sur $\mathfrak{g}(F)$. On calcule explicitement $\mathcal{D}_{\text{nil}}^G \cap \mathcal{D}^{G,\text{st}}$. Soit $\mathbf{H}$ un groupe endoscopique elliptique et non ramifié de $\mathbf{G}$. Pour tout $D \in \mathcal{D}_{\text{nil}}^H \cap \mathcal{D}^{H,\text{st}}$, on calcule explicitement un élément de $\mathcal{D}_{\text{nil}}^G$ qui est un transfert de D . L'article contient quelques résultats annexes tels que le calcul de la constante de proportionnalité entre une « fonction de Lusztig » et sa transformée de Fourier, ou le calcul du facteur de transfert pour les groupes classiques.

Abstract (Nilpotent orbital integrals and endoscopy for unramified classical groups)

Let $\mathbf{G}$ be an unramified classical group over a p -adic local field F , where p is big enough. Let $\mathfrak{g}$ be the Lie algebra of $\mathbf{G}$. Let $\mathcal{D}_{\text{nil}}^G$ be the space of invariant distributions on $\mathfrak{g}(F)$, with support included in the nilpotent set. Let $\mathcal{D}^{G,\text{st}}$ be the space of stably invariant distributions on $\mathfrak{g}(F)$. We describe explicitly $\mathcal{D}_{\text{nil}}^G \cap \mathcal{D}^{G,\text{st}}$. Let $\mathbf{H}$ be an elliptic unramified endoscopic group of $\mathbf{G}$. For all $D \in \mathcal{D}_{\text{nil}}^H \cap \mathcal{D}^{H,\text{st}}$, we describe an element of $\mathcal{D}_{\text{nil}}^G$ that is a transfer of D . The paper contains also related results : a “Lusztig function” is equal to its Fourier transform up to a scalar and we describe the scalar ; we describe also the transfer factor for classical groups.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
I. Définitions générales	15
II. Fonctions de Green	29
III. Une base de $\text{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\text{ent}})$	49
IV. Stabilité	69
V. Transformées de Fourier des fonctions de Lusztig	93
VI. Démonstration de la proposition IV.3 dans le cas symplectique ..	119
VII. Démonstration de la proposition IV.3 dans le cas orthogonal	183
VIII. Correspondance de Springer	243
IX. Distributions stables à support nilpotent	277
X. Facteurs de transfert	309
XI. Induction endoscopique d'orbites nilpotentes	323
XII. Transfert d'intégrales orbitales nilpotentes	393
Index des notations	443
Bibliographie	447

INTRODUCTION

Soient p un nombre premier et F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On utilisera dans cette introduction quelques notations standard qui seront définies dans le corps de l'article. Si U est une variété algébrique définie sur F , on pose $U = U(F)$.

Soient G un groupe algébrique défini sur F , réductif, connexe et quasi-déployé et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Notons $C_c^\infty(g)$ l'espace des fonctions sur g , à valeurs complexes, localement constantes et à support compact, et $\mathcal{D}^G$ l'espace des distributions invariantes sur g , *i.e.* des formes linéaires sur $C_c^\infty(g)$ qui sont invariantes par l'action adjointe de tout élément de G . Pour $X \in g$, on définit son orbite :

$$\mathcal{O}(X) = \{\mathrm{Ad}(x)X; x \in G\}$$

que l'on munit d'une mesure invariante par adjonction. L'intégrale orbitale associée est la distribution $\phi^G(X, \cdot)$ définie par :

$$\phi^G(X, f) = \int_{\mathcal{O}(X)} f(X') dX'$$

pour toute $f \in C_c^\infty(g)$. Cette intégrale orbitale appartient à $\mathcal{D}^G$.

Notons $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ le sous-ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathcal{D}^G$ n'est autre que la clôture dans $C_c^\infty(g)^*$, pour la topologie faible, du sous-espace engendré par $\{\phi^G(X, \cdot); X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}\}$.

Soit $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. L'orbite $\mathcal{O}(X)$ n'est pas en général l'ensemble des points sur F d'une variété algébrique. Un tel ensemble est l'orbite stable :

$$\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X) = \{X' \in g; \exists x \in G(\overline{F}), \mathrm{Ad}(x)X = X'\}.$$

Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{E}(X)$ de l'ensemble des orbites contenues dans cette orbite stable. On a donc la décomposition en union disjointe :

$$(1) \quad \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X) = \bigcup_{X' \in \mathcal{E}(X)} \mathcal{O}(X').$$

On sait que $\mathcal{E}(X)$ est un ensemble fini. On définit l'intégrale orbitale stable $\phi^{G,\text{st}}(X, \cdot)$ par l'égalité

$$\phi^{G,\text{st}}(X, \cdot) = \sum_{X' \in \mathcal{E}(X)} \phi^G(X', \cdot).$$

Les mesures doivent être convenablement normalisées. On note $\mathcal{D}^{G,\text{st}}$ la clôture dans $C_c^\infty(g)^*$, pour la topologie faible, du sous-espace engendré par $\{\phi^{G,\text{st}}(X, \cdot); X \in g_{\text{reg}}\}$.

Plus généralement, on définit la notion de groupe endoscopique de $\mathbf{G}$ (cf. [Lan], [Ko] et ci-dessous X.1). Un tel groupe $\mathbf{H}$ est algébrique, défini sur F , réductif, connexe et quasi-déployé. Sa dimension est inférieure ou égale à celle de $\mathbf{G}$ mais son rang est égal à celui de $\mathbf{G}$. Soit $\mathbf{H}$ un tel groupe. Langlands et Shelstad ont défini :

- un sous-ensemble $h_{G-\text{reg}}$ de h_{reg} qui est un ouvert de Zariski dense dans h ;
- une correspondance entre orbites stables dans $h_{G-\text{reg}}$ et orbites stables dans g_{reg} ;
- une application

$$\Delta_{G,H} : h_{G-\text{reg}} \times g_{\text{reg}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que, pour $(Y, X) \in h_{G-\text{reg}} \times g_{\text{reg}}$, on ait :

- $\Delta_{G,H}(Y, X) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{O}^{\text{st}}(Y)$ et $\mathcal{O}^{\text{st}}(X)$ se correspondent ;
- si $Y' \in \mathcal{O}^{\text{st}}(Y)$ et $X' \in \mathcal{O}(X)$, $\Delta_{G,H}(Y', X') = \Delta_{G,H}(Y, X)$.

Pour $Y \in h_{G-\text{reg}}$ et $f \in C_c^\infty(g)$, on pose

$$\phi^{G,H}(Y, f) = \sum_{X' \in \mathcal{E}(X)} \Delta_{G,H}(Y, X') \phi^G(X', f).$$

Soient $f \in C_c^\infty(g)$ et $f^H \in C_c^\infty(h)$. On dit que f^H est un transfert de f si et seulement si pour tout $Y \in h_{G-\text{reg}}$, on a l'égalité :

$$\phi^{G,H}(Y, f) = \phi^{H,\text{st}}(Y, f^H).$$

Dualement, soient $D^H \in \mathcal{D}^H$ et $D \in \mathcal{D}^G$. On dit que D est un transfert de D^H si et seulement si pour toutes $f \in C_c^\infty(g)$ et $f^H \in C_c^\infty(h)$ telles que f^H soit un transfert de f , on a l'égalité

$$D(f) = D^H(f^H).$$

Remarque. — Cette égalité implique $D^H(f^H) = 0$ pour toute f^H telles que l'on ait $\phi^{H,\text{st}}(Y, f^H) = 0$ pour tout $Y \in h_{G-\text{reg}}$, i.e. D^H est stablement invariante.

La théorie de l'endoscopie très succinctement introduite ci-dessus est apparue pour la première fois dans [LL] et a été développée par Langlands dans [Lan]. Ces auteurs travaillent sur les groupes et non sur les algèbres de Lie comme nous nous bornons à le faire. Le but ultime de cette théorie est d'établir des correspondances entre représentations automorphes sur des groupes $\mathbf{H}$ et $\mathbf{G}$ quand $\mathbf{H}$ est un groupe endoscopique de $\mathbf{G}$.

Pour les distributions à support semi-simple régulier, les notions de stabilité et de transfert sont sans mystère. Elles deviennent plus obscures au voisinage des points

singuliers. Notons $\mathcal{D}_{\text{nil}}^G$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{D}^G$ à support nilpotent. Nous nous assignons dans cet article deux buts :

- (2) $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ décrire l'espace } \mathcal{D}_{\text{nil}}^G \cap \mathcal{D}^{G,\text{st}}; \\ \bullet \text{ } \mathbf{H} \text{ étant un groupe endoscopique de } \mathbf{G}, \text{ décrire un transfert} \\ \mathcal{D}_{\text{nil}}^H \cap \mathcal{D}^{H,\text{st}} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{nil}}^G. \end{array} \right.$

Nous restreindrons considérablement la généralité de la situation en supposant :

- $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ classiques et non ramifiés ;
- p grand relativement à la dimension de $\mathbf{G}$.

Décrivons donc le contenu de l'article et nos résultats. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur F , resp. sur l'extension quadratique non ramifiée E de F , muni d'une forme bilinéaire non dégénérée q_V antisymétrique ou symétrique, resp. d'une forme sesquilinéaire non dégénérée q_V hermitienne. On suppose que V possède un réseau autodual (cf. I.3). On note d la dimension de V et on suppose $p \geq 3d + 1$. On note $\mathbf{G}$ la composante neutre du groupe d'isométries de (V, q_V) et on réalise $\mathfrak{g}$ comme sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$.

On introduit la notion de réseau presque autodual de V ; c'est un réseau $L \subset V$ tel que, en notant $\tilde{L}$ son dual, on ait :

$$\tilde{L} \supset L \supset \mathfrak{p}_F \tilde{L}$$

cf. I.3. Le stabilisateur $k(L)$ d'un tel réseau dans g est une sous-algèbre parahorique maximale de g . Notons g_{ent} la réunion de ces ensembles $k(L)$ quand L parcourt l'ensemble des réseaux presque autoduals de V . C'est l'ensemble des éléments « entiers » de g . Notons $\mathcal{D}_{\text{ent}}^G$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{D}^G$ à support dans g_{ent} . D'autre part, notons $\mathcal{H}$ le sous-espace de $C_c^\infty(g)$ engendré par les fonctions invariantes par une sous-algèbre d'Iwahori de g (cf. I.9) et notons

$$\text{res}_{\mathcal{H}} : C_c^\infty(g)^* \longrightarrow \mathcal{H}^*$$

la restriction naturelle. L'intérêt de ces notions est le suivant :

- $\mathcal{D}_{\text{ent}}^G$, qui contient $\mathcal{D}_{\text{nil}}^G$, est par certains côtés plus accessible que $\mathcal{D}_{\text{nil}}^G$ car il est la clôture de l'espace engendré par $\{\phi^G(X, \cdot); X \in g_{\text{reg}} \cap g_{\text{ent}}\}$;
- il approche $\mathcal{D}_{\text{nil}}^G$ car :

- (3) la restriction de $\text{res}_{\mathcal{H}}$ à $\mathcal{D}_{\text{nil}}^G$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_{\text{nil}}^G$ sur $\text{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\text{ent}}^G)$

([W1] et ci-dessous, théorème I.9).

On commence par étudier $\mathcal{D}_{\text{ent}}^G$. Si $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots)$ est une partition (cf. I.6), on note $c(\mu)$ le nombre de termes non nuls de μ ; pour tout entier $i \geq 1$, $c_i(\mu)$ le nombre de termes de μ égaux à i ; $S(\mu) = \sum_{j \geq 1} \mu_j$.

Supposons (V, q_V) du cas « unitaire ». Notons $\Theta(V)$ l'ensemble des triplets de partitions (μ^0, μ', μ'') tels que :

- $2S(\mu^0) + S(\mu') + S(\mu'') = d$;