Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CONDITIONS DE KAN SUR LES NERFS DES ω-CATÉGORIES

Félix Loubaton

Tome 151
Fascicule 2

2023

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 331-406

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 151, juin 2023

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96
`bulletin@smf.emath.fr` • `smf.emath.fr`

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Fabien DURAND

Bull. Soc. Math. France
151 (2), 2023, p. 331-406

CONDITIONS DE KAN SUR LES NERFS DES ω-CATÉGORIES

PAR FÉLIX LOUBATON

RÉSUMÉ. — On montre que le nerf de Street $\mathcal{N}(C)$ d'une ω-catégorie stricte C est un complexe de Kan (respectivement une quasi-catégorie) si et seulement si les n-cellules de C pour $n \geq 1$ (respectivement $n > 1$) sont faiblement inversibles. De plus, on munit $\mathcal{N}(C)$ d'une structure d'ensemble complicial saturé où les n-simplexes marqués correspondent aux morphismes du $n^{ième}$ oriental vers C envoyant l'unique n-cellule non-triviale du domaine sur une cellule faiblement inversible de C.

ABSTRACT (*Kan conditions on the nerves of ω-categories*). — We show that the Street nerve of a strict ω-category C is a Kan complex (respectively a quasi-category) if and only if the n-cells of C for $n \geq 1$ (respectively $n > 1$) are weakly invertible. Moreover, we equip $\mathcal{N}(C)$ with a structure of saturated complicial set where the n-simplices correspond to morphisms from the n^{th} oriental to C sending the unique non-trivial n-cell of the domain to a weakly invertible cell of C.

Introduction

Dans [4], Grothendieck introduit le foncteur nerf entre la catégorie des petites catégories et celle des ensembles simpliciaux. Ce foncteur est défini grâce à l'objet cosimplicial qui envoie $[n]$ sur la petite catégorie suivante :

$$h_0([n]) := \ 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n.$$

Texte reçu le 15 février 2021, modifié le 7 novembre 2022, accepté le 25 janvier 2023.

FÉLIX LOUBATON, Laboratoire J. A. Dieudonné, Université Côte d'Azur, 28 avenue Valrose, 06108 Nice Cedex 2, France • *E-mail :* `felix.loubaton@gmail.com`

Classification mathématique par sujets (2010). — 18N30.

Mots clefs. — Théorie des catégories supérieures, ω-catégories, ensembles compliciaux.

doi:10.24033/bsmf.2871

Le nerf d'une petite catégorie C est défini par la formule $\mathcal{N}_{cat}(C)_n := Hom(h_0([n]), C)$. De plus, ce foncteur admet un adjoint à gauche, qui associe à un ensemble simplicial X, la catégorie $h_0(X)$. De nombreuses notions de la théorie des catégories peuvent alors être « traduites » dans le langage des ensembles simpliciaux, ce qui est le point de départ de la théorie des $(\infty, 1)$-catégories. Intéressons nous en particulier à la notion de groupoïde, et à sa « traduction » dans les ensembles simpliciaux.

L'inclusion $\Lambda^0[2] \to \Delta[2]$ est envoyée par le foncteur h_0 sur l'inclusion de catégories :

$$\begin{tikzcd} & 1 & & & & 1 \arrow[dr, "\sigma_{1,2}"] & \\ 0 \arrow[ur, "\sigma_{0,1}"] \arrow[rr, "\sigma_{0,2}"'] & & 2 & \hookrightarrow & 0 \arrow[ur, "\sigma_{0,1}"] \arrow[rr, "\sigma_{0,2}"'] & \circlearrowleft & 2 \end{tikzcd}$$

Ainsi, par adjonction, l'ensemble simplicial $\mathcal{N}_{cat}(C)$ a la propriété de relèvement à droite par rapport à $\Lambda^0[2] \to \Delta[2]$, si et seulement si pour tout couple de morphismes (f, g) de C de même domaine, il existe un morphisme $x : t(g) \to t(f)$ tel que $f = x \circ g$. Dans le formalisme que l'on développera, on dira que *l'équation* $\boldsymbol{Eq}(\sigma_{02} = x \circ \sigma_{01})$ *admet une solution pour tout choix de paramètre.* On peut alors démontrer simplement que $\mathcal{N}_{cat}(C)$ a cette propriété de relèvement si et seulement si tous les morphismes de C admettent des inverses à gauche. De façon analogue, $\mathcal{N}_{cat}(C)$ a la propriété de relèvement à droite par rapport à $\Lambda^2[2] \to \Delta[2]$, si et seulement si tous les morphismes de C admettent des inverses à droite, ou dans notre formalisme, si et seulement si *l'équation* $\boldsymbol{Eq}(\sigma_{02} = \sigma_{12} \circ x)$ *admet une solution pour tout choix de paramètre.* Enfin on en déduit que C est un groupoïde si et seulement si $\mathcal{N}_{cat}(C)$ a la propriété de relèvement à droite par rapport à $\Lambda^i[2] \to \Delta[2]$ pour $i = 0, 2$. Le nerf de C a en fait la propriété de relèvement à droite par rapport à toute les inclusions de cornets :

THÉORÈME (Boardman & Vogt). — *Une catégorie C est un groupoïde si et seulement si l'ensemble simplicial $\mathcal{N}_{cat}(C)$ a la propriété de relèvement par rapport aux inclusions $\Lambda^i[n] \to \Delta[n]$ pour $0 \leq i \leq n$.*

Dans [9], Street définit un nerf de la catégorie des petites ω-catégories [1]. vers la catégorie des ensembles simpliciaux. Ce nerf est construit grâce à l'objet cosimplicial qui à $[n]$, associe le $n^{\text{ième}}$ oriental, noté $|[n]|$. Pour les petites

1. Une ω-catégorie est la donnée d'un ensemble de 0-cellule, pour tout couple de 0-cellules d'un ensemble de 1-cellules, pour tout couple parallèle de 1-cellules, un ensemble de 2-cellules, etc., muni de compositions vérifiant des lois d'associativité et de distributivité strictes. Cette notion est précisément définie dans la définition 1.4

dimensions, on peut en donner une représentation graphique :

$$[0] \mapsto 0$$

$$[1] \mapsto 0 \xrightarrow{\sigma_{01}} 1$$

$$[2] \mapsto \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr, "\sigma_{12}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\sigma_{012}"] & \\ 0 \arrow[ur, "\sigma_{01}"] \arrow[rr, "\sigma_{02}"'] & & 2 \end{tikzcd}$$

$$[3] \mapsto \begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "\sigma_{12}"] & & 2 \arrow[dr, "\sigma_{23}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\sigma_{023}"] & \\ & 0 \arrow[ul, "\sigma_{01}"] \arrow[ur, "\sigma_{02}"'] \arrow[rr, "\sigma_{03}"'] \arrow[u, phantom, "\Nwarrow\sigma_{012}"] & & 3 \end{tikzcd} \quad \underset{\sigma_{0123}}{\Rrightarrow} \quad \begin{tikzcd} & 1 \arrow[rr, "\sigma_{12}"] \arrow[dr, "\sigma_{13}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\sigma_{013}"] & & 2 \arrow[dl, "\sigma_{23}"] \arrow[l, phantom, "\Nearrow\sigma_{123}"] \\ 0 \arrow[ur, "\sigma_{01}"] \arrow[rr, "\sigma_{03}"'] & & 3 & \end{tikzcd}$$

Le nerf de Street est alors défini par la formule $\mathcal{N}(C)_n := Hom(|[n]|, C)$. Par exemple, une ω-catégorie C a la propriété de relèvement par rapport à l'inclusion $\Lambda^0[2]$ si pour tout couple de 1-cellules de même domaine (f, g), il existe une 1-cellule x ainsi qu'une 2-cellule $y : f \to x *_0 g$. On dira alors que *l'équation* $\boldsymbol{Eq}(y : \sigma_{03} \to x *_0 \sigma_{03})$ *admet une (pré)-solution pour tout choix de paramètre.* De même, C a la propriété de relèvement par rapport à l'inclusion $\Lambda^0[3] \to \Delta[3]$ si pour tout sextuplet de 1-cellules (f, g, h, i, j, k), et tout triplet de 2-cellules (α, β, γ) telles que $\alpha : g \to i *_0 f$, $\beta : h \to k *_0 g$, et $\gamma : h \to j *_0 f$, il existe une 2-cellule $x : j \to k *_0 i$, ainsi qu'une 3-cellule

$$y : (k *_0 \alpha) *_1 \beta \to (x *_0 f) *_1 \gamma.$$

On dira alors que *l'équation*

$$\boldsymbol{Eq}(y : (\sigma_{23} *_0 \sigma_{012}) *_1 (\sigma_{023}) \to (x *_0 \sigma_{01}) *_1 \sigma_{013})$$

admet une (pré-)solution pour tout choix de paramètre.

L'objectif premier est d'étudier les équations définies par les inclusions de cornets, afin d'en déduire le théorème suivant :

Théorème A (4.19). — *Soit C une ω-catégorie. L'ensemble simplicial $\mathcal{N}(C)$ a la propriété de relèvement par rapport aux inclusions $\Lambda^i[n+1] \to \Delta[n+1]$ pour tout $n > 0$ et tout $0 \leq i \leq n$ (resp. pour tout $n > 1$ et tout $0 < i < n$) si et seulement si les cellules de C de dimension supérieure ou égale à* 1 *(resp strictement supérieur à* 1*) sont faiblement inversibles.*

Une propriété importante du nerf catégorique est que l'on peut caractériser son image : un ensemble simplicial y appartient si et seulement si il a la propriété de relèvement unique à droite par rapport aux inclusions de cornets intérieurs.

Cependant, pour le nerf de Street, il n'existe pas d'ensemble de monomorphismes S tel qu'un ensemble simplicial soit le nerf de Street d'une ω-catégorie si et seulement si il a la propriété de relèvement unique à droite par rapport aux morphismes de S. Le problème provient du fait que pour une ω-catégorie C, il est impossible de distinguer des autres les n-simplexes qui correspondent à des morphismes $|[n]| \to C$ qui envoient l'unique n-cellule non triviale du domaine sur une unité. Pour pallier ce problème, Roberts, puis Street considérèrent un nerf à valeur dans la catégorie des *ensembles simpliciaux stratifiés*. Cette catégorie a pour objet les couples (K, tK) où K est un ensemble simplicial et tK est un sous ensemble des simplexes de K comprenant les simplexes dégénérés. Les morphismes entre (K, tK) et (L, tL) sont les morphismes $f : K \to L$ tel que $f(tK) \subset tL$. Un simplexe dans tK est dit *marqué*. On munit alors $\mathcal{N}(C)$ de la stratification composée des simplexes $|[n]| \to C$ qui envoient l'unique n-cellule non triviale du domaine sur une unité. Roberts conjectura alors l'existence d'un ensemble de monomorphismes S tel qu'un ensemble simplicial stratifié soit le nerf de Street d'une ω-catégorie si et seulement si il a la propriété de relèvement unique à droite par rapport aux morphismes de S. Cette conjecture a finalement été démontrée par Verity ([10]). Il est intéressant de noter qu'au niveau des ensembles simpliciaux, ces morphismes sont des inclusions de cornets.

De la même façon que les ensembles simpliciaux ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux inclusions de cornets intérieurs, c'est à dire les quasi-catégories, forment un modèle des $(\infty, 1)$-catégories, on voudrait que pour tout entier naturel n, les ensembles simpliciaux stratifiés ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes de S et dont tous les simplexes de dimension strictement supérieur à n soit marqués, appelés *ensembles compliciaux n-triviaux*, soient un modèle des (∞, n)-catégories. Dans ce contexte, pour $k \leq n$, les k-simplexes marqués correspondraient à des k-cellules (faiblement) inversibles. Cependant, pour que cette interprétation des simplexes marqués soit correcte, il faut ajouter une condition supplémentaire sur la stratification, qui correspond à un analogue de la propriété (2 parmi 6)[2] que doivent vérifier les n-cellules faiblement inversibles. Cela amène à considérer la notion d'*ensemble complicial saturé* (définition 5.9). Cependant, bien que la stratification évoquée au paragraphe précédent munisse $\mathcal{N}(C)$ d'une structure d'ensemble complicial, elle n'est pas saturée en général.

Dans [7], Riehl évoque la possibilité de considérer d'autres stratifications sur le nerf d'une ω-catégorie, afin d'obtenir une structure d'ensemble complicial saturé. Si C est une 1-catégorie, une telle stratification est obtenue en

2. Si C est une catégorie, une classe W de morphismes vérifie la propriété (2 parmi 6) lorsque pour tout triplet de morphismes f, g, h tel que gf et hg soient dans W, alors f, g, h et hgf sont dans W.

marquant les 1-simplexes qui correspondent à des 1-cellules inversibles ([7, proposition 3.1.5]). De plus, Ozornova et Rovelli ont montré que si C est une 2-catégorie, une telle stratification est obtenue en marquant les n-simplexes qui correspondent à des morphismes $|[n]| \to C$ qui envoient l'unique n-cellule non triviale du domaine sur une 1-cellule 2-inversible si $n = 1$, sur une 2-cellule inversible si $n = 2$ et sur une identité si $n \geq 3$ ([6, théorème 5.2]). Gagna, Harpaz et Lanari démontrent un résultat analogue pour les ensembles simpliciaux échelonnées dans [3]. Grâce à l'étude des inclusions de cornets qu'on se propose d'effectuer, on pourra montrer une généralisation de ces résultats :

Théorème B (5.22). — *Soit C une ω-catégorie. Si on définit $t\mathcal{N}(C)$ comme étant l'ensemble des simplexes de C correspondant aux morphismes $|\Delta[n]| \to C$ qui envoient l'unique n-cellule non triviale du domaine sur une cellule faiblement inversible (définition 1.7), l'ensemble simplicial stratifié $(\mathcal{N}(C), t\mathcal{N}(C))$ est un ensemble complicial saturé.*

Si on appelle n-trivial une ω-catégorie dont toutes les cellules de dimension strictement supérieures à n sont faiblement inversibles, on peut en déduire un analogue du théorème A pour les ensembles simpliciaux stratifiés :

Corollaire C. — *Soit C une ω-catégorie. L'ensemble complicial $(\mathcal{N}(C), t\mathcal{N}(C))$ est n-trivial si et seulement si C est n-trivial.*

Malheureusement, comme en témoignent les diagrammes présents dans l'article de Street, les orientaux deviennent rapidement très compliqués lorsque la dimension augmente. On doit donc réaliser un important travail préliminaire avant de pouvoir démontrer ces deux théorèmes.

La première étape va être d'étudier la théorie développée dans [8]. Dans cet article, Steiner construit un foncteur $\nu : \mathbf{CDA} \to \omega\textbf{-cat}$ entre une catégorie composée de complexes de chaînes munis d'une structure additionnelle, appelés les complexes dirigés augmentés, et la catégorie des ω-catégories strictes. Il montre de plus que ce foncteur admet un adjoint à gauche. Restreint aux complexes dirigés augmentés libres admettant une « bonne » base, il devient une équivalence de catégorie dont le codomaine est composé des ω-catégories admettant un « bon » ensemble de générateurs.

Nous allons construire un autre foncteur μ, entre la catégorie des complexes dirigés augmentés admettant une « bonne » base et la catégorie des ω-catégories admettant un « bon » ensemble de générateurs, isomorphe à ν, qui utilisera le formalisme des *chaînes*. C'est alors un cadre adapté pour définir un « algorithme » qui exprime les cellules de $\nu K \cong \mu K$ en un composé de générateurs, où K est un complexe dirigé augmenté.

Les orientaux correspondent alors à l'objet cosimplicial défini par le composé des foncteurs suivants :

$$\Delta \xrightarrow{C_\bullet} \mathbf{CDA}_B \xrightarrow{\mu} \omega\textbf{-cat}$$