Séminaire BOURBAKI Novembre 2019
72^{e} année, 2019–2021, n^{o} 1167, p. 27 à 54
doi : 10.24033/ast.1156

ESTIMATIONS PSEUDO-SPECTRALES ET STABILITÉ DES TOURBILLONS PLANS [d'après Te Li, Dongyi Wei et Zhifei Zhang]

par **Thierry Gallay**

INTRODUCTION

L'étude mathématique de la stabilité des écoulements hydrodynamiques, qui a débuté vers le milieu du XIX^{e} siècle, connaît actuellement une activité foisonnante en lien avec les développements récents de la théorie spectrale et de l'analyse des opérateurs. En raison de la structure même des équations de la mécanique des fluides, où les phénomènes de transport jouent un rôle essentiel, les opérateurs linéaires rencontrés dans ce cadre ne sont jamais auto-adjoints. Il ne suffit donc pas de déterminer leur spectre pour connaître leurs propriétés principales, et ce constat a précisément motivé l'introduction de la notion de *pseudo-spectre* (Trefethen et Embree, 2005). Dans cet exposé, on considère des situations relativement simples, mais pertinentes pour de nombreuses applications, où l'opérateur linéarisé se décompose en une partie auto-adjointe négative, qui provient de la diffusion, et une partie antisymétrique due au transport. On introduit dans ce contexte les notions naturelles de *dissipation accélérée* et de *seuil de stabilité*, qui font l'objet de plusieurs travaux récents (Bedrossian et Coti Zelati, 2017 ; Bedrossian, Masmoudi et Vicol, 2016 ; Bedrossian, Vicol et Wang, 2018 ; Coti Zelati, Elgindi et Widmayer, 2020 ; Masmoudi et Zhao, 2019 ; Wei, Zhang et Zhao, 2020). On étudie ensuite le cas particulier des tourbillons plans, où les premiers résultats de stabilité non linéaire exploitant l'effet de la rotation ont été obtenus tout dernièrement grâce aux estimations pseudo-spectrales très précises établies à cette fin par Li, Wei et Zhang (2020).

1. TRANSPORT ET DIFFUSION

Le but de cette section est d'introduire, dans un cadre un peu général, les notions de « dissipation accélérée » et de « seuil de stabilité », ou seuil de transition, qui apparaissent naturellement dans l'étude de la stabilité de nombreux écoulements visqueux. Pour fixer les idées, on commence par présenter un exemple particulièrement simple.

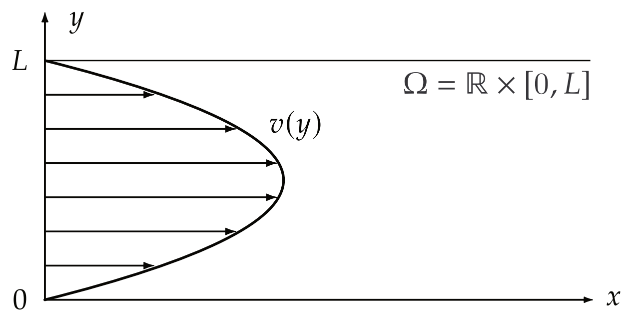
Exemple 1.1 (Scalaire passif)**.** On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible dans un canal bidimensionnel représenté par le domaine $\Omega = \mathbb{R} \times [0, L]$. On suppose que la vitesse V du fluide est parallèle aux parois et ne dépend que de la variable transverse :

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} v(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \Omega\,. \tag{1}$$

Un tel écoulement est solution des équations d'Euler quel que soit le profil de vitesse $v : [0, L] \to \mathbb{R}$, et des équations de Navier–Stokes dans le cas particulier du profil de Poiseuille $v(y) = y(L - y)$. Supposons à présent que l'on insère dans le fluide une goutte de colorant ou une pincée de particules très légères, qui ne perturbent pas sensiblement l'écoulement initial. Ces particules sont alors entraînées par le courant, et subissent en outre des collisions fréquentes avec les molécules du fluide qui produisent un mouvement désordonné de type brownien. Il s'ensuit que la densité $f(x, y, t)$ des particules convoyées par le fluide est solution de l'équation de transport-diffusion

$$\partial_t f(x,y,t) + v(y)\partial_x f(x,y,t) = \varepsilon \Delta f(x,y,t)\,, \tag{2}$$

où $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ est l'opérateur de Laplace et $\varepsilon > 0$ est une constante de diffusion, que l'on supposera petite dans la suite. Il convient de compléter l'équation (2) par des conditions au bord, et on supposera ici pour simplifier que $f(x, 0, t) = f(x, L, t) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$.



Considéré isolément, l'opérateur de transport $v(y)\partial_x$ dans l'équation (2) ne fait que redistribuer les valeurs de la solution $f(x, y, t)$; mais combiné avec la diffusion, il influence fortement le comportement du système pour les grands temps. En effet, si le profil de vitesse n'est pas constant, le transport le long des caractéristiques crée de forts gradients dans la direction transverse à l'écoulement, associés à une « filamentation » du support de la distribution des particules, et ceci renforce considérablement l'action de la diffusion, tout particulièrement lorsque la constante ε est petite. Cette interaction entre transport et diffusion est déjà mentionnée et étudiée dans les travaux historiques de Rayleigh (1879/80), Kelvin (1887), et Orr (1907).

On introduit à présent un problème abstrait dont la structure est directement inspirée par l'exemple 1.1, voir aussi Constantin, Kiselev, Ryzhik et Zlatoš (2008).

Dans un espace de Hilbert H, on considère l'équation d'évolution

$$\partial_t f + \Lambda f = \varepsilon L f + N(f)\,, \tag{3}$$

où L, Λ sont des opérateurs linéaires (non bornés), N est une application non linéaire, et $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre. Nos hypothèses principales sont les suivantes :

- ▹ $L : D(L) \to H$ est auto-adjoint et négatif : $L = L^* \le 0$;
- ▹ $\Lambda : D(\Lambda) \to H$ est antisymétrique, et relativement borné par rapport à L ;
- ▹ l'application $f \mapsto N(f)$ est quadratique au voisinage de l'origine.

On rappelle que l'opérateur Λ est relativement borné par rapport à L si son domaine de définition $D(\Lambda)$ contient celui de L, et si $\|\Lambda f\|$ est inférieur à $C(\|Lf\| + \|f\|)$ pour tout $f \in D(L)$. Notre but est de montrer que, pour toute donnée initiale $f_0 \in H$ suffisamment petite, l'équation (3) possède une solution globale unique qui reste dans un voisinage de l'origine pour tous les temps et converge vers zéro lorsque $t \to \infty$. On cherche notamment à quantifier la taille du bassin d'attraction de l'origine ainsi que le taux de décroissance des solutions en fonction du paramètre de diffusion ε, dans la limite où $\varepsilon \to 0$.

Remarque 1.2. Bien évidemment, l'exemple 1.1 entre dans le cadre ci-dessus si on prend $H = L^2(\Omega)$, $L = \Delta$, $\Lambda = v(y)\partial_x$, et $N = 0$. Plus généralement, si on perturbe l'écoulement (1) en tant que solution stationnaire des équations de Navier–Stokes dans un domaine sans bord, on obtient une équation d'évolution de la forme (3), où $\varepsilon > 0$ est la viscosité cinématique du fluide et où l'opérateur Λ est à présent non local, en raison de la pression. Un exemple célèbre est le flot de Kolmogorov sur le tore $\mathbb{T}^2$, présenté dans l'exemple 1.3 ci-dessous. Le cadre (3) s'applique également à l'étude de la stabilité des tourbillons de Lamb–Oseen, qui sera discutée en détail à la section 2. A contrario, lorsqu'on perturbe l'écoulement de Poiseuille dans le domaine $\Omega = \mathbb{R} \times [0, L]$ en supposant, comme il se doit, que la vitesse du fluide s'annule sur les parois, on génère des instabilités hydrodynamiques dans la limite où le nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = 1/\varepsilon$ tend vers l'infini (Grenier, Guo et Nguyen, 2016a,b). De telles instabilités n'apparaissent pas dans le modèle (3), quels que soient les choix des opérateurs L et Λ, et doivent donc être étudiées par d'autres approches.

Exemple 1.3 (Flot de Kolmogorov). On considère les équations de Navier–Stokes incompressibles sur le tore $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$:

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = \nu\Delta u - \nabla p + F\,, \quad \operatorname{div} u = 0\,, \tag{4}$$

où $u : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$ est le champ de vitesse du fluide, $p : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est la pression, et F est une force extérieure. La densité du fluide étant supposée égale à 1, l'unique paramètre est la viscosité cinématique $\nu > 0$, que l'on supposera petite. Le système (4) admet une solution stationnaire de la forme

$$\bar{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{p}(x, y) = 0\,, \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2\,,$$

pour autant que le terme de force soit donné par $F = \nu\bar{u}$. Pour étudier la stabilité de cet écoulement, on pose $u = \bar{u} + \widetilde{u}$ et on observe que la perturbation $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$ vérifie l'équation

$$\partial_t \widetilde{u} + \sin y\, \partial_x \widetilde{u} + \cos y\, \widetilde{u}_2\, e_x + (\widetilde{u} \cdot \nabla)\widetilde{u} = \nu\Delta\widetilde{u} - \nabla p\,, \quad \operatorname{div} \widetilde{u} = 0\,, \tag{5}$$

où $e_x = (1, 0)$. Afin de se ramener à un système de la forme (3), il convient d'éliminer la pression dans (5), laquelle sert à garantir la condition d'incompressibilité. En l'absence de bords, une approche efficace consiste à étudier le *tourbillon* du fluide défini par

$$\widetilde{\omega} = \partial_x \widetilde{u}_2 - \partial_y \widetilde{u}_1\,.$$

Cette quantité vérifie l'équation scalaire

$$\partial_t \widetilde{\omega} + \sin y(\partial_x \widetilde{\omega} + \widetilde{u}_2) + \widetilde{u} \cdot \nabla\widetilde{\omega} = \nu\Delta\widetilde{\omega}\,,$$

où le champ de vitesse $\widetilde{u}$ doit être exprimé en termes du tourbillon en résolvant le système elliptique $\partial_x \widetilde{u}_1 + \partial_y \widetilde{u}_2 = 0$, $\partial_x \widetilde{u}_2 - \partial_y \widetilde{u}_1 = \widetilde{\omega}$. Si on suppose que le champ de vitesse est à moyenne nulle sur $\mathbb{T}^2$, une condition préservée par l'équation (5), on trouve que $\widetilde{u} = \nabla^\perp \widetilde{\psi} := (-\partial_y \widetilde{\psi}, \partial_x \widetilde{\psi})$ où $\Delta\widetilde{\psi} = \widetilde{\omega}$. On obtient ainsi l'équation d'évolution

$$\partial_t \widetilde{\omega} + \sin y\, \partial_x (1 + \Delta^{-1})\widetilde{\omega} + (\nabla^\perp \Delta^{-1}\widetilde{\omega}) \cdot \nabla\widetilde{\omega} = \nu\Delta\widetilde{\omega}\,,$$

qui est de la forme (3) avec $\varepsilon = \nu$ et

$$L = \Delta\,, \quad \Lambda = \sin y\, \partial_x (1 + \Delta^{-1})\,, \quad N(\widetilde{\omega}) = -(\nabla^\perp \Delta^{-1}\widetilde{\omega}) \cdot \nabla\widetilde{\omega}\,.$$

Dans l'espace H des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{T}^2$ à moyenne nulle, l'opérateur L est clairement auto-adjoint et négatif, mais Λ n'est pas antisymétrique en raison du terme non local $1 + \Delta^{-1}$, qui ne commute pas avec $\sin y$. On remarque toutefois que l'opérateur Λ possède un noyau de dimension infinie, constitué de toutes les fonctions indépendantes de x d'une part, et du sous-espace engendré par $\{\sin x\,, \cos x\}$ d'autre part. Comme l'effet du transport est évidemment nul sur $\ker(\Lambda)$, il est naturel pour l'étude du problème linéarisé de se restreindre au sous-espace invariant $H_\perp = \ker(\Lambda)^\perp$. Muni du produit scalaire non local

$$\langle \omega_1\,, \omega_2 \rangle = \int_{\mathbb{T}^2} \omega_1 (1 + \Delta^{-1})\, \overline{\omega_2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,,$$

ce sous-espace $H_\perp$ devient un espace de Hilbert où l'opérateur L est encore auto-adjoint, et Λ est à présent antisymétrique.

Remarque 1.4. Le terme de force $F = \nu\bar{u}$ qui stabilise le flot de Kolmogorov est tout à fait artificiel. Si $F = 0$, la solution de (5) avec donnée initiale $\bar{u}$ est donnée par $u(x, y, t) = (\sin y, 0)\mathrm{e}^{-\nu t}$, et dépend donc (lentement) du temps ce qui complique l'étude de sa stabilité (Beck et Wayne, 2013 ; Ibrahim, Maekawa et Masmoudi, 2019 ; Wei et Zhang, 2019 ; Wei, Zhang et Zhao, 2020).

1.1. Estimations linéaires

Étudions pour commencer les propriétés du système (3) lorsque $N = 0$. Par le théorème de Hille-Yosida (Pazy, 1983), l'opérateur auto-adjoint $L : D(L) \to H$ est le générateur d'un semi-groupe C_0 d'opérateurs linéaires bornés dans H, vérifiant la propriété de contraction

$$\|\mathrm{e}^{\tau L} f_0\| \le \|f_0\|\,, \quad \text{pour tout } \tau \ge 0\,.$$

De même, si on suppose que l'opérateur $\Lambda : D(\Lambda) \to H$ est anti-adjoint, le théorème de Stone (Reed et Simon, 1972) affirme que cet opérateur engendre un groupe unitaire dans H :

$$\|\mathrm{e}^{t\Lambda} f_0\| = \|f_0\|\,, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}\,.$$

Dans le cas très particulier où les opérateurs L et Λ commutent, la solution de (3) avec $N = 0$ est donnée par la formule explicite

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t\Lambda}\mathrm{e}^{\varepsilon t L} f_0 = \mathrm{e}^{\varepsilon t L}\mathrm{e}^{-t\Lambda} f_0\,, \quad \text{pour tout } t \ge 0\,,$$

où $f_0 \in H$ est la donnée initiale. En particulier l'égalité $\|f(t)\| = \|\mathrm{e}^{\varepsilon t L} f_0\|$ montre que le transport n'a ici aucune influence sur la norme de la solution, laquelle évolue sur une échelle de temps diffusive proportionnelle à $1/\varepsilon$.

Remarque 1.5. Lorsque L et Λ commutent, le transport peut néanmoins influencer le comportement de la solution de (3), mesurée dans d'autres normes, en raison des propriétés *dispersives* du groupe unitaire $\mathrm{e}^{t\Lambda}$. Ces propriétés jouent évidemment un rôle essentiel dans l'étude du cas non visqueux où $\varepsilon = 0$. Pour certains écoulements simples, comme les perturbations du flot de Couette, elles permettent même d'obtenir un résultat de stabilité non linéaire dans des espaces de fonctions très régulières (Bedrossian et Masmoudi, 2015). Un exemple où apparaît naturellement un opérateur antisymétrique qui commute avec la diffusion, au moins dans des situations géométriques simples, est celui des fluides géophysiques (Chemin, Desjardins, Gallagher et Grenier, 2006). Ici l'opérateur Λ représente la force de Coriolis due à la rotation de la Terre, et le paramètre ε est le nombre de Rossby, inversement proportionnel à la fréquence de rotation. Dans ce contexte, il est naturel de poser $\tau = \varepsilon t$ et de remarquer que la quantité $g(\tau) = \varepsilon^{-1} f(\tau/\varepsilon)$ vérifie l'équation mise à l'échelle

$$\partial_\tau g + \frac{1}{\varepsilon}\Lambda g = L g + N_\varepsilon(g)\,, \quad \text{où} \quad N_\varepsilon(g) = \varepsilon^{-2} N(\varepsilon g)\,, \tag{6}$$

qui met clairement en évidence l'importance du terme de rotation dans la limite $\varepsilon \to 0$.

On se place désormais dans le cas général où les opérateurs L et Λ ne commutent pas. On remarque que l'opérateur $\varepsilon L - \Lambda : D(L) \to H$ est dissipatif, car

$$\mathrm{Re}\,\big\langle (\varepsilon L - \Lambda) f\,, f \big\rangle = \varepsilon\ \mathrm{Re}\,\big\langle L f\,, f\big\rangle \le 0\,, \quad \text{pour tout } f \in D(L)\,.$$

On suppose que $\varepsilon L - \Lambda$ est également m-dissipatif, c'est-à-dire que $\lambda - \varepsilon L + \Lambda$ est inversible pour un (et donc pour tout) $\lambda > 0$. Cette condition est automatiquement remplie si, par exemple, Λ est relativement compact par rapport à L. Le théorème