ASTÉRISQUE 251

NOMBRE ET RÉPARTITION DE POINTS DE HAUTEUR BORNÉE

édité par

Emmanuel Peyre

Société Mathématique de France 1998
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

E. Peyre
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S., 7 rue René-Descartes, 67084 Strasbourg, France.
E-mail : `peyre@irma.u-strasbg.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — Primaire 11G35 ; secondaires 14G05, 11E76, 14M25, 14G10.

Mots clefs. — Point rationnel, hauteur, surface cubique, variété torique, mesure de Tamagawa.

NOMBRE ET RÉPARTITION DE POINTS DE HAUTEUR BORNÉE

édité par Emmanuel Peyre

***Résumé.* —** Si les points rationnels d'une variété définie sur un corps de nombres sont denses pour la topologie de Zariski, il est naturel de munir cette variété de hauteurs qui, du point de vue de la géométrie d'Arakelov, s'interprètent comme degrés d'intersection avec des fibrés en droites munis de métriques. L'objectif est alors d'étudier de manière asymptotique l'ensemble des points dont la hauteur est inférieure à un nombre réel donné, et cela en des termes aussi géométriques que possible.

Ce volume est issu de deux séminaires qui ont eu lieu en avril et en mai 1996. Il contient des articles de Slater et Swinnerton-Dyer, de Heath-Brown, de Fouvry et de de la Bretèche centrés sur le cas des surfaces cubiques, un texte de Billard sur les modèles minimaux des surfaces rationnelles, ainsi que des contributions de Salberger, de Peyre et de Batyrev et Tschinkel dont le principal objet est l'interprétation du terme dominant dans l'étude asymptotique du nombre de points de hauteur bornée.

***Abstract* (Number and distribution of points of bounded height)**

If the rational points of a variety over a number field are Zariski dense, then it is natural to equip this variety with heights, which one can interpret as intersection degrees relative to metrized line bundles. The aim is to study the set of points of bounded height asymptotically and to relate the results to the geometry of the variety.

This volume is the outcome of two seminars held in Paris in April and May 1996. It contains articles by Slater and Swinnerton-Dyer, Heath-Brown, Fouvry, and de la Bretèche on cubic surfaces, a text by Billard on minimal models of rational surfaces and contributions of Batyrev and Tschinkel, Salberger, and Peyre on the conjectural interpretation of the dominant term in the asymptotic behaviour of the number of points with bounded height.

© Astérisque 251, SMF 1998

PRÉFACE

Si les points rationnels d'une variété algébrique définie sur un corps de nombres sont denses pour la topologie de Zariski, il est naturel de munir cette variété de hauteurs qui, du point de vue de la géométrie d'Arakelov, s'interprètent comme degré d'intersection avec un fibré en droites muni de métriques. Il s'agit donc de fonctions définies sur l'ensemble des points rationnels à valeurs réelles strictement positives. L'objectif est alors d'étudier de manière asymptotique l'ensemble des points dont la hauteur est inférieure à un nombre réel donné, et cela en des termes aussi géométriques que possible. Cette étude a connu ces dernières années un regain important dont Manin a été un des principaux instigateurs. Ce renouveau a en particulier porté sur une meilleure compréhension du terme dominant dans le nombre de points de hauteur bornée. Ceci passe par une prise en compte des problèmes de répartition tels que l'existence de fermés accumulateurs susceptibles d'occulter le reste de la variété dans l'étude asymptotique.

Ce volume est issu de deux séminaires qui ont eu lieu en avril et en mai 1996 et où furent présentés divers développements récents de ce domaine.

Une des richesses de cette théorie est la variété des points de vue et des méthodes mises en œuvre. Nous avons tenté d'en donner une palette aussi large que possible. La cas des surfaces cubiques est particulièrement révélateur à cet égard ; en effet il apparaît dans la plupart des textes présentés ici, mais avec un regard à chaque fois différent.

Les premiers articles leur sont entièrement consacrés : Slater et Swinnerton-Dyer donnent une minoration du nombre des points de hauteur bornée sur le complémentaire des 27 droites pour une vaste classe de surfaces cubiques, tandis que Heath-Brown en présente une majoration. Les deux textes suivants étudient de manière fine le cas particulier de la surface cubique singulière d'équation

$$X_1X_2X_3 = T^3,$$

mais avec des procédés de théorie analytique des nombres « élémentaire » dans celui de Fouvry et d'analyse complexe dans celui de de la Bretèche. Cet exemple qui a fait l'objet de plusieurs discussions informelles lors des rencontres de 1996 apparaît également dans les textes de Salberger et de Batyrev et Tschinkel. La contribution de Billard porte sur la conjecture de Batyrev et Manin pour les modèles minimaux des surfaces rationnelles. Les trois derniers articles mettent plutôt l'accent sur l'interprétation conjecturale du terme dominant dans l'estimation asymptotique. Salberger exprime la constante apparaissant dans ce terme à l'aide des torseurs universels. Cette approche lui permet en outre de redémontrer un résultat de Batyrev et Tschinkel sur les variétés toriques projectives, lisses et déployées. Ce relèvement aux torseurs universels est également l'objet du texte qui le suit. Batyrev et Tschinkel quant à eux considèrent ces interprétations conjecturales à la lumière de travaux récents de Fujita concernant le programme des modèles minimaux pour les variétés algébriques polarisées. Ils développent également une généralisation de la notion de nombre de Tamagawa associé à une hauteur.

Nous tenons à remercier les organisateurs du séminaire sur les variétés rationnelles, le responsable des lundis arithmétiques ainsi que le réseau européen sur les formes automorphes pour les séminaires à l'origine de ce livre.

Emmanuel Peyre

TABLE DES MATIÈRES