

ASTÉRISQUE 276

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 1999/2000
EXPOSÉS 865-879

Société Mathématique de France 2002
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, École normale supérieure,
45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.
Url : <http://www.bourbaki.ens.fr/>

Mots clefs et classification mathématique par sujets (2000)

Exposé n° 865. — Groupes de tresses, groupes ordonnés, groupes de difféotopies, problème des mots, grands cardinaux, autodistributivité. — 20F36, 20F60, 20F10, 57M07, 06F15, 03E55, 08A50.

Exposé n° 866. — Mouvement brownien, propriété trajectorielle, marche aléatoire à boucles effacées, exposant d'intersection, exposant de croissance, invariance conforme, pavage par dominos, arbre couvrant, fonction de couplage. — 60J65, 60J15, 05C70.

Exposé n° 867. — Group action, K -theory, derived category, quotient variety, resolution of singularity, motivic integration, McKay correspondence, Hilbert schemes of G -orbits. — 14xx.

Exposé n° 868. — Vortex, supraconductivity, Ginzburg-Landau equations, Abrikosov lattices, abelian gauge theory, Yang-Mills Higgs equations, elliptic PDE, variational methods, free boundary problems. — 35Jxx, 35Qxx, 49Jxx, 49Rxx, 58E15, 81T13.

Exposé n° 869. — Conjecture de Baum-Connes, K -théorie, réseaux dans les groupes de Lie, propriété T . — 19K99, 22E50, 58G12.

Exposé n° 870. — Théorie des modèles, géométrie diophantienne, corps de différence, conjecture de Manin-Mumford. — 03C60, 14K15, 11G10, 03C45.

Exposé n° 871. — Elliptic curves, modular curves, Galois representations, automorphic representations. — 11F80, 11G18, 14G35.

Exposé n° 872. — Variété algébrique réelle, variété symplectique, courbes rationnelles, variété de Fano, flot hamiltonien, trajectoire de Floer. — 53D12, 14P25.

Exposé n° 873. — Correspondance de Langlands, chtoucas de Drinfeld, corps de fonctions. — 11Fxx, 14Fxx, 22Exx.

Exposé n° 874. — Motivic integration, motivic zeta function, motivic convolution, McKay correspondence. — 14Exx, 14F42.

Exposé n° 875. — Vertex algebra, Virasoro algebra, conformal field theory, moduli space of curves, chiral algebra. — 17B67, 17B68, 17B90, 81T40, 14H10, 14H60.

Exposé n° 876. — Eisenstein series, Shimura curves, height pairings, arithmetic cycles. — 14G40, 11G15, 11G18, 11F27, 11F30, 14G35, 11G50, 11F46.

Exposé n° 877. — Polynomial functors, Steenrod algebra, Schur algebra, polynomial representations, general linear group, stable K -theory. — 19D55, 55S10, 16G10.

Exposé n° 878. — Braid groups, Burau representations, BMW-algebras. — 20F36, 57M99.

Exposé n° 879. — Random matrices, random permutations, integrable systems and Painlevé equations. — 15A52, 37K10.

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 1999/2000
EXPOSÉS 865-879

Résumé. — Comme les précédents volumes de ce séminaire, celui-ci contient quinze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité : deux exposés de théorie des groupes, un sur les algèbres de dimension infinie, trois de géométrie algébrique, deux de géométrie arithmétique, un sur la correspondance de Langlands, deux de probabilités, un d'équations aux dérivées partielles, un d'algèbres d'opérateurs, un de théorie des modèles et un sur les foncteurs polynomiaux.

Abstract (Séminaire Bourbaki, volume 1999/2000, exposés 865-879)

As in the preceding volumes of this seminar, one finds here fifteen survey lectures on topics of current interest: two lectures on group theory, one on infinite dimensional algebras, three of algebraic geometry, two of arithmetic geometry, one on the Langlands correspondence, two on probabilities, one on partial differential equations, one on operator algebras, one on model theory, and one on polynomial functors.

Résumés des exposés	3
---------------------------	---

NOVEMBRE 1999

865	Christian KASSEL — <i>L'ordre de Dehornoy sur les tresses</i>	7
866	Jean-François LE GALL — <i>Exposants critiques pour le mouvement brownien et les marches aléatoires [d'après Kenyon, Lawler et Werner]</i>	29
867	Miles REID — <i>La correspondance de McKay</i>	53
868	Tristan RIVIÈRE — <i>Ginzburg-Landau Vortices: the static model</i> ..	73
869	Georges SKANDALIS — <i>Progrès récents sur la conjecture de Baum-Connes. Contribution de Vincent Lafforgue</i>	105

MARS 2000

870	Élisabeth BOUSCAREN — <i>Théorie des modèles et conjecture de Manin-Mumford [d'après Ehud Hrushovski]</i>	137
871	Bas EDIXHOVEN — <i>Rational elliptic curves are modular [after Breuil, Conrad, Diamond and Taylor]</i>	161
872	Viatcheslav KHARLAMOV — <i>Variétés de Fano réelles [d'après C. Viterbo]</i>	189
873	Gérard LAUMON — <i>La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions [d'après Laurent Lafforgue]</i>	207
874	Eduard LOOIJENGA — <i>Motivic measures</i>	267

JUN 2000

875	Edward FRENKEL — <i>Vertex algebras and algebraic curves</i>	299
876	Stephen S. KUDLA — <i>Derivatives of Eisenstein series and generating functions for arithmetic cycles</i>	341
877	Teimuraz PIRASHVILI — <i>Polynomial functors over finite fields [after Franjou, Friedlander, Henn, Lannes, Schwartz, Suslin]</i>	369
878	Vladimir TURAEV — <i>Faithful linear representations of the braid groups</i>	389
879	Pierre VAN MOERBEKE — <i>Random matrices and permutations, matrix integrals and integrable systems</i>	411

Christian KASSEL – *L'ordre de Dehornoy sur les tresses*

Au début des années 1990 Dehornoy a déduit un ordre total sur le groupe des tresses d'Artin à partir de l'étude générale des systèmes autodistributifs, définis comme des ensembles munis d'une loi de composition vérifiant l'identité $x(yz) = (xy)(xz)$. Cette étude avait été motivée par un axiome indémontrable de théorie des ensembles impliquant l'existence d'un système autodistributif remarquable. Dans ce texte on présente les travaux de Dehornoy ainsi que leur lien inattendu avec la théorie des ensembles. On expose aussi deux constructions géométriques récentes de l'ordre de Dehornoy.

Jean-François LE GALL – *Exposants critiques pour le mouvement brownien et les marches aléatoires [d'après Kenyon, Lawler et Werner]*

Nous discutons certains travaux récents qui étudient les exposants critiques pour le mouvement brownien et les marches aléatoires. Dans la première partie, nous décrivons les résultats de Lawler et Werner donnant des informations précises sur les exposants d'intersection browniens. Dans la seconde, nous présentons les travaux de Kenyon qui conduisent au calcul exact de l'exposant de croissance pour la marche aléatoire à boucles effacées dans le plan.

Miles REID – *La correspondance de McKay*

Let M be a quasiprojective algebraic manifold with $K_M = 0$ and G a finite automorphism group of M acting trivially on the canonical class K_M ; for example, a subgroup G of $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ acting on $\mathbb{C}^n$ in the obvious way. We aim to study the quotient variety $X = M/G$ and its resolutions $Y \rightarrow X$ (especially under the assumption that Y has $K_Y = 0$) in terms of G -equivariant geometry of M . At present we know 4 or 5 quite different methods of doing this, taken from string theory, algebraic geometry, motives, moduli, derived categories, etc.

For G in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ with $n = 2$ or 3 , we obtain several methods of cobbling together a basis of the homology of Y consisting of algebraic cycles in one-to-one correspondence with the conjugacy classes or the irreducible representations of G .

Tristan RIVIÈRE – *Ginzburg-Landau Vortices: the static model*

We study the formation of vortices (zero sets having a “topological charge”) for critical points of the Ginzburg-Landau Functional arising in the physics of superconductivity and more generally in abelian gauge theory. We present results regarding the existence or non existence of vortices in the fundamental state, their location in space and the eventual formation of Abrikosov lattices. We will establish a link between the position of the vortices and the total space of solutions in the strongly repulsive limit.

Georges SKANDALIS – *Progrès récents sur la conjecture de Baum-Connes. Contribution de Vincent Lafforgue*

Cet exposé, à la suite de celui de Pierre Julg en 1998, fait un nouveau point sur la conjecture de Baum-Connes. Une nouvelle barrière vient en effet juste d'être franchie par V. Lafforgue : celle de la propriété T de Kazhdan. Le but ici est d'exposer les diverses étapes du travail de Lafforgue.

Élisabeth BOUSCAREN – *Théorie des modèles et conjecture de Manin-Mumford [d'après Ehud Hrushovski]*

Nous présenterons des applications récentes de la théorie des modèles à des questions de géométrie diophantienne sur les corps de nombres. Nous indiquerons en particulier comment E. Hrushovski, en utilisant la théorie des corps algébriquement clos munis d'un automorphisme, donne une nouvelle démonstration de la conjecture de Manin-Mumford, démonstration qui produit de bonnes bornes effectives.

Bas EDIXHOVEN – *Rational elliptic curves are modular [after Breuil, Conrad, Diamond and Taylor]*

In 1994, Wiles and Taylor-Wiles proved that every semistable elliptic curve over $\mathbf{Q}$ is modular, in the sense that it is a quotient of the jacobian of some modular curve. This result has since then been generalized by an increasing sequence of groups of authors, culminating in the proof by Breuil, Conrad, Diamond and Taylor that all elliptic curves over $\mathbf{Q}$ are modular. Their strategy is essentially that of Wiles, but they have to overcome many technical problems. Especially the deformation theory of local Galois representations becomes much harder.

Viatcheslav KHARLAMOV – *Variétés de Fano réelles [d'après C. Viterbo]*

Les variétés de Fano sont les variétés à fibré anticanonique ample. Elles sont dominées par des familles de courbes rationnelles. Un cas particulier d'une conjecture de J. Kollár affirme que la partie réelle d'une variété de Fano définie sur $\mathbb{R}$ et de dimension supérieure à trois n'admet aucune métrique à courbure strictement négative. Utilisant des méthodes de géométrie symplectique, C. Viterbo a montré cette conjecture dans le cas particulier où $b_2 = 1$ et la variété est dominée par des courbes rationnelles d'aire minimale : en étudiant le flot de Floer, il montre comment l'existence de courbes rationnelles entraîne celle de géodésiques fermées d'indice non nul sur la partie réelle.

Gérard LAUMON – *La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions [d'après Laurent Lafforgue]*

Laurent Lafforgue a établi la correspondance de Langlands pour GL_r sur un corps de fonctions. Sa preuve suit la stratégie introduite, il y a plus de 25 ans, par V. Drinfeld pour traiter le cas $r = 2$. Une des innovations principales est la construction d'une compactification toroïdale de PGL_r^{n+1} / PGL_r pour n arbitraire qui généralise la compactification de C. De Concini et C. Procesi ($n = 1$).

Dans l'exposé oral nous présenterons le théorème de L. Lafforgue et ses conséquences, ainsi que quelques aspects de sa très longue démonstration (près de 700 pages).

Eduard LOOIJENGA – *Motivic measures*

Kontsevich proposed a Haar measure on $k[[t]]$, k a field of characteristic zero, with values in a universal ring that is obtained in a simple manner from the varieties over k : it assigns to the ideal $t^n k[[t]]$ the value $\mathbb{L}^{-n}$, where $\mathbb{L}$ stands for the affine line over k . This leads to a measure with the same value ring for schemes over $k[[t]]$. Denef & Loeser and Batyrev have shown that this measure gives rise to invariants with remarkable properties. These are new even in case the scheme is obtained from a k -variety by base change.

Edward FRENKEL – *Vertex algebras and algebraic curves*

Vertex algebras are algebraic objects that formalize the concepts of vertex operators and operator product expansion which originated from physics. They were defined by Borcherds and studied extensively in the last fifteen years. After giving the definition of vertex algebra and describing a few examples, we show how to attach to a vertex algebra a geometric object: a vector bundle on a formal disc equipped with a flat connection and a canonical horizontal section. We then associate to a vertex algebra and an algebraic curve an invariant called the space of conformal blocks. These spaces reflect the geometric structure of various moduli spaces associated to algebraic curves.

Stephen S. KUDLA – *Derivatives of Eisenstein series and generating functions for arithmetic cycles*

In their classic work, Hirzebruch and Zagier showed that certain generating functions whose coefficients are the cohomology classes of curves on Hilbert modular surfaces are the q -expansions of elliptic modular forms of weight 2. In this talk I will describe an analogous family of generating functions whose coefficients arise from arithmetical algebraic geometry, e.g., from 0-cycles on the arithmetic surfaces associated to Shimura curves. The identification of such a function with the derivative of a Siegel–Eisenstein series at its center of symmetry provides a kind of arithmetic analogue of the Siegel–Weil formula.

Teimuraz PIRASHVILI – *Polynomial functors over finite fields [after Franjou, Friedlander, Henn, Lannes, Schwartz, Suslin]*

For finite fields there is an essential difference between polynomial maps and polynomials. This yields two different versions of polynomial endofunctors of finite vector spaces. The first one is closely related to unstable modules over Steenrod algebra, while the second one is related to representations of algebraic groups. Recent works by Betley, Franjou, Friedlander, Suslin and others lead to a comparison theorem between associated Ext-groups. These results are a key for the solutions of Betley–Pirashvili conjecture involving the stable K -theory of Waldhausen and for computation of cohomology of the general linear group over finite fields with twisted coefficients.

Vladimir TURAEV – *Faithful linear representations of the braid groups*

Recently D. Krammer and S. Bigelow showed that a certain homomorphism of the group of braids on n strings B_n to a group of real matrices is injective for all $n \geq 1$. This answers in the positive the long-standing question of linearity of B_n . We shall discuss these results of D. Krammer and S. Bigelow as well as earlier results of J. Moody (1991) and others on the non-faithfulness of the classical Burau representation of B_n .

Pierre VAN MOERBEKE – *Random matrices and permutations, matrix integrals and integrable systems*

This lecture presents a survey of recent developments in the area of random matrices (finite and infinite) and random permutations. These probabilistic problems suggest matrix integrals (or Fredholm determinants), which arise very naturally as integrals over the tangent space to symmetric spaces, as integrals over groups and finally as integrals over symmetric spaces. Upon appropriately adding time-parameters, these matrix integrals are natural tau-functions for integrable lattices, like the Toda, Pfaff and Toeplitz lattices, but also for integrable PDE's, like the Korteweg-de Vries equation. These matrix integrals or Fredholm determinants also satisfy Virasoro constraints, which combined with the integrable equations lead to (partial) differential equations for the original probabilities.

