Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

PRINCIPE LOCAL-GLOBAL POUR LES ZÉRO-CYCLES

Yongqi Liang

Tome 142
Fascicule 1

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 269-301

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 142, janvier 2014

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 300 €, hors Europe : 334 € ($ 519)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Bull. Soc. math. France
142 (1), 2014, p. 269–301

PRINCIPE LOCAL-GLOBAL POUR LES ZÉRO-CYCLES SUR CERTAINES FIBRATIONS AU-DESSUS DE L'ESPACE PROJECTIF

PAR YONGQI LIANG

RÉSUMÉ. — On étudie le principe local-global pour les zéro-cycles de degré 1 sur certaines variétés définies sur les corps de nombres et fibrées au-dessus de l'espace projectif.

Parmi d'autres applications, on complète la preuve de l'assertion: l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 sur les fibrés au-dessus de l'espace projectif en variétés de Severi-Brauer ou en surfaces de Châtelet.

ABSTRACT (*Local-Global principle for zero-cycles on certain fibrations over the projective space*)

We study the local-global principle for zero-cycles of degree 1 on certain varieties defined over number fields and fibered over the projective space.

Among other applications, we complete the proof of the statement: the Brauer-Manin obstruction is the only obstruction to the Hasse principle and weak approximation for zero-cycles of degree 1 on Severi-Brauer variety bundles or Châtelet-surface bundles over the projective space.

Texte reçu le 23 février 2012, accepté le 5 octobre 2012.

YONGQI LIANG, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-sud 11, F-91405 Orsay, France • *E-mail :* `yongqi.liang@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G25 ; 11G35, 14D10.

Mots clefs. — Zéro-cycle de degré 1, principe de Hasse, approximation faible, obstruction de Brauer-Manin, fibré en variétés de Severi-Brauer.

Introduction

Soit X une variété projective lisse géométriquement intègre sur un corps de nombres k. Le principe de Hasse et l'approximation faible pour les points rationnels sur une telle variété ont été considérés depuis longtemps. L'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les points rationnels a été introduite par Yu. I. Manin dans son exposé [29] (resp. par Colliot-Thélène/Sansuc dans [9]). Parallèlement, pour les zéro-cycles, l'obstruction de Brauer-Manin est également définie dans l'article de Colliot-Thélène [3]. On se demande si l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les zéro-cycles de degré 1, voir [5] pour quelques conjectures explicites par Colliot-Thélène. Mentionnons deux aspects des résultats directement liés à ce travail.

- Des résultats sur l'obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles ont été obtenus par Colliot-Thélène, Eriksson, Saito, et Scharaschkin, dans [32], [5], [14], pour une courbe ; et par Colliot-Thélène, Frossard, Salberger, Skorobogatov, Swinnerton-Dyer, van Hamel, Wittenberg, et l'auteur, dans [33], [11], [10], [6], [15], [20], [37], [27], pour certaines fibrations au-dessus d'une courbe, voir l'introduction de [27] pour plus d'informations.
- D'autre part, autour du problème parallèle de l'obstruction de Brauer-Manin pour les points rationnels sur une fibration à fibres géométriquement intègres au-dessus de $\mathbb{P}^n$, les meilleurs résultats généraux sont dus à Harari dans sa série d'articles [21], [22], et [23]. Il impose une hypothèse arithmétique moins forte sur les fibres, à savoir que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule sur les fibres d'un sous-ensemble hilbertien. Dans [36], la même question pour les fibrations en variétés de Severi-Brauer au-dessus de $\mathbb{P}^n$, où des fibres géométriquement non intègres sont permises, est discutée par Wittenberg en admettant l'hypothèse de Schinzel.

Le but de ce travail est d'établir l'assertion que « l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 » pour certaines fibrations au-dessus de $\mathbb{P}^n$. Les résultats principaux sont les suivants, où $X_{\bar\eta} = X_\eta \times_{k(\mathbb{P}^n)} \overline{k(\mathbb{P}^n)}$ est la fibre générique géométrique.

Théorème A (Théorèmes 2.3, 3.1). — *Soit k un corps de nombres. Soit $X \to \mathbb{P}^n$ un k-morphisme dominant à fibre générique géométriquement intègre tel que* $\mathrm{Br}(X_{\bar\eta})$ *soit fini et* $\mathrm{Pic}(X_{\bar\eta})$ *soit sans torsion.*

Supposons que

- *toutes les fibres sont géométriquement intègres,*

– *pour tout point fermé θ dans un certain ouvert non vide de $\mathbb{P}^n$, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation faible pour les points rationnels (ou pour les zéro-cycles de degré* 1*) sur la fibre X_θ.*

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 *sur X.*

THÉORÈME B (Théorèmes 2.4, 3.3). — *Soit k un corps de nombres. Soit $X \to \mathbb{P}^n$ un k-morphisme dominant à fibre générique géométriquement intègre tel que* $\mathrm{Br}(X_{\bar\eta})$ *soit fini et* $\mathrm{Pic}(X_{\bar\eta})$ *soit sans torsion.*

Supposons que

– *la fibre générique $X_{\eta/k(\mathbb{P}^n)}$ admet un zéro-cycle de degré* 1,
– *pour tout point fermé θ dans un certain ouvert non vide de $\mathbb{P}^n$, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré* 1 *sur la fibre X_θ.*

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 *sur X.*

THÉORÈME C (Théorème 3.5). — *Soit k un corps de nombres. Soit $X \to \mathbb{P}^n$ un k-morphisme dominant à fibre générique géométriquement intègre tel que* $\mathrm{Br}(X_{\bar\eta})$ *soit fini et* $\mathrm{Pic}(X_{\bar\eta})$ *soit sans torsion.*

Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :

– (ABÉLIENNE-SCINDÉE) *pour tout point $\theta \in \mathbb{P}^n$ de codimension* 1, *il existe une composante irréductible Y de la fibre X_θ de multiplicité* 1 *telle que la fermeture algébrique de $k(\theta)$ dans le corps de fonctions de Y est une extension abélienne de $k(\theta)$,*
– *pour tout point fermé θ dans un certain ouvert non vide de $\mathbb{P}^n$, la fibre X_θ satisfait le principe de Hasse/l'approximation faible pour les points rationnels (ou pour les zéro-cycles de degré* 1*).*

Alors, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation faible pour les zéro-cycles de degré 1 *sur X.*

L'hypothèse « $\mathrm{Br}(X_{\bar\eta})$ est fini et $\mathrm{Pic}(X_{\bar\eta})$ est sans torsion » est équivalente à l'hypothèse « $H^i(X_{\bar\eta}, \mathcal{O}_{X_{\bar\eta}}) = 0$ pour $i = 1, 2$ et $NS(X_{\bar\eta})$ est sans torsion », qui est vérifiée si X_η est supposée rationnellement connexe (Lemme 1.4).

COROLLAIRE D (Corollaires 4.1, 4.2). — *L'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse/à l'approximation forte pour les zéro-cycles de degré* 1 *sur les fibrés au-dessus de l'espace projectif en variétés de Severi-Brauer ou en surfaces de Châtelet.*