MAX KAROUBI

Homologie cyclique et K-théorie

Astérisque, tome 149 (1987)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__149__1_0>

149 ASTÉRISQUE

1987

HOMOLOGIE CYCLIQUE ET K-THÉORIE

Max KAROUBI

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification : Primary 16, 19, 53, 55
Secondary 22, 47

HOMOLOGIE CYCLIQUE ET K-THÉORIE

Max Karoubi

Ce livre représente le produit de réflexions de l'auteur sur la théorie des classes caractéristiques, vue sous l'angle de la géométrie différentielle et de la K-théorie. A l'origine de ces réflexions, il s'agissait de comprendre le caractère de Chern classique

$$K(X) \xrightarrow{\alpha} H^{pair}(X) = \oplus\ H^{2i}(X)$$

où $K(X)$ désigne le groupe de Grothendieck-Atiyah-Hirzebruch associé aux fibrés vectoriels complexes [2] et où $H^{pair}(X)$ est la cohomologie de De Rham de degré pair de la variété X. On sait que l'image de α est un réseau dans l'espace vectoriel de dimension finie $H^{pair}(X)$ et que le noyau de α est un groupe fini (cf. [23] par exemple).

Dans une première approche (esquissée en 1981 dans [27] et deux prépublications), nous avons défini un "caractère de Chern" généralisé

$$Ch_r : K_n(A) \longrightarrow \overline{H}_{n+2r}(A)$$

Ici $K_n(A)$ désigne la K-théorie algébrique de Quillen [43] et $\overline{H}_i(A)$ est "l'homologie de De Rham non commutative" de la k-algèbre A (cf. le §1 pour les détails). Si A est l'algèbre des fonctions C^∞ sur une variété X, cette théorie coïncide essentiellement avec la cohomologie de De Rham $H^*(X)$. Puisque $K_0(A) \approx K(X)$ d'après le théorème de Serre-Swan [25], on retrouve donc bien le caractère de Chern classique dans ce cas particulier.

L'introduction de l'homologie et de la cohomologie cycliques par A. Connes [12], puis les progrès faits dans cette théorie "cyclique" par J.L. Loday, D. Quillen, Feigin, Tsygan [13] [36] [47] ont permis de mieux comprendre cette théorie $\overline{H}_i(A)$ (*). Réinterprété dans le langage cyclique, le caractère de Chern généralisé décrit précédemment apparaît alors comme un homomorphisme

$$\widetilde{Ch}_r : K_n(A) \longrightarrow HC_{n+2r}(A)$$

$HC_*(A)$ désignant maintenant l'homologie cyclique telle qu'elle est exposée dans [36] La définition de $\widetilde{Ch}_r$ est relativement aisée dans un contexte d'algèbre homologique et le lecteur intéressé pourra l'étudier de manière indépendante des préliminaires et motivations géométriques du §1 (cf. 2.17-2.33). On en déduit entre autre l'accouplement

$$K_0(A) \times HC^{2r}(A) \longrightarrow k$$

décrit par A. Connes [12] .

L'intérêt des préliminaires géométriques du §1 n'est pas purement historique (en fait, on peut aussi inverser les choses et définir l'homologie cyclique à partir du complexe de De Rham non commutatif tronqué convenablement : cf. le théorème 2.14). Ils permettent d'aller beaucoup plus loin dans la définition d'invariants de la K-théorie. En effet, si A est une algèbre de Banach par exemple, on dispose aussi des groupes de K-théorie topologique $K_n^{top}(A)$ (définis si l'on veut comme les groupes d'homotopie $\pi_{n-1}(GL(A))$, $GL(A)$ désignant le groupe linéaire infini $\varinjlim_r GL_r(A)$, muni de la topologie limite inductive). Par les méthodes géométriques des §1 et 4 et avec des modifications techniques évidentes dues à la présence de la topologie, on arrive à définir aussi un homomorphisme

$$Ch_r^{top} : K_n^{top}(A) \longrightarrow HC_{n+2r}(A)$$

compatible dans un certain sens avec la périodicité de Bott (corollaire 4.17). En fait, plus généralement, si on désigne par $K_A^{top}(X)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des fibrés sur X dont la fibre est un A-module projectif de type fini, on définit un homomorphisme

$$K_A^{top}(X) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=2r} H^p(X;HC_q(A))$$

qui redonne essentiellement Ch_r^{top} pour $X = S^n$ (4.12).

La comparaison des homomorphismes $\widetilde{Ch}_r$ et Ch_r^{top} se fait le plus commodément par l'introduction de méthodes simpliciales (§5) et par la description de la

---

(*)Pour $i > 0$, on a par exemple $\overline{H}_i(A) \approx \mathrm{Ker}(\overline{HC}_i(A) \xrightarrow{B} H_{i+1}(A,A))$, $\overline{HC}_*(A)$ désignant l'homologie cyclique réduite et $H_*(A,A)$ l'homologie de Hochschild (théorème 2.15) .