TUAN NGO DAC

Compactification des champs de Chtoucas et théorie géométrique des invariants

Astérisque, tome 313 (2007)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2007__313__1_0>

ASTÉRISQUE 313

COMPACTIFICATION DES CHAMPS DE CHTOUCAS ET THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES INVARIANTS

Tuan Ngo Dac

Société Mathématique de France 2007
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Tuan Ngo Dac
CNRS - Université de Paris Nord, LAGA - Département de Mathématiques, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France.
E-mail : ngodac@math.univ-paris13.fr

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11R58, 11G09, 14G35, 14D20, 14L24.

Mots clefs. — Chtoucas - Variétés modulaires de Drinfeld - Modules des fibrés sur les courbes - Corps de fonctions - Théorie géométrique des invariants.

COMPACTIFICATION DES CHAMPS DE CHTOUCAS ET THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES INVARIANTS

Tuan Ngo Dac

Résumé. — Dans la preuve de Drinfeld et Lafforgue de la correspondance de Langlands pour GL_r sur les corps de fonctions, l'étape la plus difficile consiste à construire des compactifications des espaces de module (ou plutôt des champs) de chtoucas de Drinfeld. Pour vérifier la propreté, Lafforgue a utilisé la réduction semistable à la Langton et une analyse détaillée des propriétés modulaires qui définissent les compactifications. Si l'on espère démontrer la correspondance de Langlands sur les corps de fonctions pour d'autres groupes réductifs, une des questions naturelles est de généraliser les compactifications de Lafforgue dans le contexte d'un groupe réductif arbitraire. Dans ce cas, l'approche de Lafforgue semble difficile à mettre en œuvre.

Ce texte présente une façon de construire des compactifications des champs de chtoucas à modifications multiples qui généralisent celle des champs de chtoucas de Drinfeld. Notre approche repose sur une méthode plus générale : la théorie géométrique des invariants. Dans le cas des champs de chtoucas de Drinfeld, nous retrouvons les compactifications de Lafforgue et découvrons de nouvelles compactifications, entre autres des compactifications qui sont duales de celles de Lafforgue. De plus, notre méthode est susceptible de produire des compactifications des champs de G-chtoucas pour un groupe réductif quelconque G.

***Abstract* (Compactification of the stacks of shtukas and geometric invariant theory)**

In the proof of Drinfeld and Lafforgue of the Langlands correspondence for GL_r over function fields, the most difficult part is to construct compactifications of moduli spaces (or stacks) classifying Drinfeld's shtukas. If one hopes to prove the Langlands correspondence over function fields for other reductive groups G, it is natural to generalize the above constructions for the stacks of G-shtukas. However, the approach of Lafforgue based on the semistable reduction due to Langton seems difficult to carry out.

In this article, we use the geometric invariant theory to give a new method to construct compactifications of moduli spaces of Drinfeld's shtukas. This rediscovers not only the compactications constructed by Drinfeld and Lafforgue, but also gives rise to new families of compactications.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Champs de chtoucas de Drinfeld et leurs compactifications

Soit X une courbe algébrique projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments. Soit $k = \overline{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$; on notera

$$\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} k.$$

D'après Drinfeld, un chtouca (à droite) de rang r et de degré d sur la courbe $\overline{X}$ consiste en un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang r et de degré d sur $\overline{X}$ et une modification de $\mathcal{E}$ par son transformé de Frobenius $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_k)^*\mathcal{E} = \mathcal{E}^\sigma$:

$$\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \xleftarrow{\sim} \mathcal{E}^\sigma,$$

telle que les quotients $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'/\mathcal{E}''$ soient de longueur 1, et supportés par deux points ∞ et 0 de $\overline{X}$. On peut mettre les chtoucas de rang r et de degré d en famille et définir leur champ classifiant $\mathrm{Cht}^{r,d}$. Ce champ est algébrique au sens de Deligne-Mumford et muni d'un morphisme naturel

$$(\infty, 0) : \mathrm{Cht}^{r,d} \longrightarrow X \times X$$

qui est lisse de dimension relative $2r - 2$.

Une des difficultés majeures dans les travaux de Drinfeld et Lafforgue réside dans le fait que ce champ n'est pas de type fini et *a fortiori* n'est pas propre. Pour la surmonter, d'abord (cf. [**8**]), à tout polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}$ assez convexe qui joue le rôle d'un paramètre de troncature, Lafforgue associe un sous-champ ouvert de type fini $\mathrm{Cht}^{r,d,p}$ de $\mathrm{Cht}^{r,d}$, qui classifie les chtoucas de rang r et de degré d, dont le polygone canonique de Harder-Narasimhan du fibré vectoriel sous-jacent $\mathcal{E}$ est majoré par p.

Ensuite, dans [**9**], il propose une compactification $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}}$ de cet ouvert qui est défini comme solution d'un problème de module. On introduit d'abord les pseudo-homomorphismes complets – une notion qui généralise celle d'isomorphisme – et définit les chtoucas dégénérés. Essentiellement, un chtouca dégénéré de rang r et de degré d sur la courbe $\overline{X}$ consiste en un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang r et de degré d, une modification de $\mathcal{E}$ par un fibré vectoriel $\mathcal{E}''$ de même rang

$$\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$$

telle que les quotients $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'/\mathcal{E}''$ soient de longueur 1, et un pseudo-homomorphisme complet

$$\mathcal{E}^\sigma \Longrightarrow \mathcal{E}''$$

qui vérifie certaines conditions supplémentaires.

On montre l'existence d'un champ algébrique au sens d'Artin $\mathrm{ChtDeg}^{r,d}$ classifiant les chtoucas dégénérés de rang r et de degré d. Puis il définit le champ de chtoucas itérés $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d}}$ en imposant une liste de conditions ouvertes. Il est muni encore d'un morphisme vers $X \times X$ et d'un morphisme vers le champ $\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}$. Ce dernier a une stratification évidente indexée par les familles $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$ vérifiant $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k = r$. Cette stratification induit une stratification $\{\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d}}\}_{\underline{r}}$ sur $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d}}$ et chaque strate $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d}}$ admet une description modulaire : elle classifie essentiellement les familles de chtoucas de rang $r_1, r_2 - r_1, \ldots, r_k - r_{k-1}$. La strate ouverte qui correspond à la famille triviale $(0 < r)$ est le champ $\mathrm{Cht}^{r,d}$. Et le champ $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d}}$ vérifie la partie d'existence (mais non d'unicité) du critère valuatif de propreté. Puis Lafforgue définit des conditions de troncature de type combinatoire pour obtenir $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}}$ et analyse ces conditions sur les strates $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d}}$. Par la réduction semistable à la Langton, il prouve :

***Théorème* (Lafforgue).** — *Supposons que le polygone p est assez convexe. Alors le morphisme*

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}} \longrightarrow X \times X$$

est propre.

Pour le prouver, il utilise le critère valuatif de propreté. Il se place sur la fibre générique du chtouca qu'il s'agit de faire dégénérer ; cette fibre a une structure de φ-espace et il définit la notion de φ-réseau itéré dans un φ-espace. Chaque tel réseau définit un chtouca dégénéré. La réduction semistable à la Langton consiste à transformer un réseau itéré en un autre et, par une série de telles transformations, Lafforgue réussit à trouver un unique φ-réseau itéré tel que le chtouca dégénéré associé est un chtouca itéré et qu'il vérifie les conditions de troncature.

La théorie géométrique des invariants

On renvoie le lecteur au livre [**13**] pour plus de détails de cette théorie. Étant donné un schéma quasi-projectif Y muni d'une action d'un groupe réductif G, la théorie géométrique des invariants produit des ouverts U de Y invariants par l'action de G tels que le quotient $U//G$ existe. Le théorème fondamental de cette théorie est le suivant. Soit Y un schéma quasi-projectif muni d'une action d'un groupe réductif G. Supposons que cette action se relève en une linéarisation sur un fibré inversible ample $\mathcal{L}$ de Y.

On peut associer à cette linéarisation l'ouvert Y^s des points stables et l'ouvert des points semistables Y^{ss} de Y :

$$Y^s \subset Y^{ss} \subset Y.$$

Alors le quotient $Y^{ss}//G$ existe ; il est quasi-projectif. Les points géométriques du quotient $Y^s//G$ sont en bijection avec les orbites de G dans Y^s. De plus, si Y est projectif, alors $Y^{ss}//G$ est projectif.

Si Y est projectif, il existe un critère numérique, dit de Hilbert-Mumford, pour déterminer les ensembles des points stables et semistables. Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ un sous-groupe à un paramètre et soit x un point de Y ; comme Y est projective, donc propre, on peut définir

$$x_0 = \lim_{t\to 0} \lambda(t)x.$$

Ce point x_0 est un point fixe de Y sous l'action du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ via λ. Cela implique que l'action de $\mathbb{G}_m$ sur la fibre de $\mathcal{L}$ en x_0 est donnée par un caractère

$$t \longmapsto t^r, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

On pose

$$\mu(x, \lambda) = -r.$$

Le critère numérique de Hilbert-Mumford dit que x est semistable (resp. stable) si et seulement si, pour tout sous-groupe à un paramètre non trivial λ, on a $\mu(x, \lambda) \geq 0$ (resp. $\mu(x, \lambda) > 0$).

Récemment, Thaddeus, Dolgachev et Hu ont étudié comment varient les différents quotients lorsque l'on fait varier la linéarisation. L'espace des linéarisations possibles est divisé en un nombre fini de polyèdres ou « chambres ». Le quotient ne change pas à l'intérieur d'une chambre mais, lorsque l'on franchit un mur qui sépare deux chambres, les quotients sont reliés par une transformation birationnelle qui, sous certaines hypothèses supplémentaires, est un flip au sens de Mori, c'est-à-dire le composé d'un éclatement et d'une contraction. On renvoie aux articles [**2**], [**18**], [**20**] pour plus de détails. Il y a plusieurs applications de ce principe de variation des quotients, par exemple, [**16**], [**15**].

Notre apport

Venons-en à notre contribution. Dans ce travail, nous commençons par appliquer la théorie géométrique des invariants pour trouver des compactifications des champs de chtoucas de Drinfeld. Nous travaillons avec les champs $\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d}$ de chtoucas dégénérés munis d'une structure de niveau en un sous-schéma fermé fini N de X. Il est muni d'un morphisme représentable et fini sur $\mathrm{ChtDeg}^{r,d} \times_{X\times X} (X - N)^2$ et d'une action du groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$; le quotient de son espace grossier associé par ce groupe fini est l'espace grossier associé à $\mathrm{ChtDeg}^{r,d} \times_{X\times X} (X - N)^2$.

Fixons un polygone p_0 assez convexe en fonction de X et de r. Nous introduisons un champ $\mathcal{Y}$ qui est un $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-torseur au-dessus de l'ouvert $\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d} \times_{\mathrm{Vec}^{r,d}} \mathrm{Vec}^{r,d,p_0}$ de $\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d}$, où h dépend du degré d. Nous construisons