ÉTIENNE GHYS

Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes

Séminaire N. Bourbaki, 1991-1992, exp. n° 747, p. 93-136.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1991-1992__34__93_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1991
44ème année, 1991/92, n° 747

DYNAMIQUE DES FLOTS UNIPOTENTS SUR LES ESPACES HOMOGÈNES

par Étienne GHYS

INTRODUCTION

Considérons le flot ϕ^t sur le tore $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ défini par : $\phi^t(x \bmod \mathbf{Z}^n) = (x+tw) \bmod \mathbf{Z}^n$, où $w = (w_1, \cdots, w_n)$ est un vecteur de $\mathbf{R}^n$. On sait depuis L. Kronecker que si les w_i sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, toutes les orbites de ϕ^t sont denses dans le tore. En général, l'adhérence d'une orbite est un sous-tore de T^n, de dimension égale au rang de $\{w_i\}$ sur $\mathbf{Q}$.

Soit maintenant G un groupe de Lie connexe et Γ un réseau de G, c'est-à-dire un sous-groupe discret tel que le volume (de Haar) du quotient à gauche $\Gamma\backslash G$ soit fini. Un sous-groupe H de G opère naturellement à droite sur $\Gamma\backslash G$. Dans quelles conditions a-t-on un résultat analogue à celui de L. Kronecker garantissant l'homogénéité des adhérences d'orbites ?

Dans une série de quatre articles, M. Ratner vient d'obtenir une réponse très satisfaisante en résolvant une conjecture de M.S. Raghunathan [71-72-73-74]. Pour l'énoncer, convenons de dire qu'un élément g d'un groupe de Lie G est *unipotent* si l'automorphisme adjoint $\mathrm{Ad}(g)$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est unipotent, c'est-à-dire n'a que 1 comme valeur propre. Un sous-groupe H de G est unipotent si tous ses éléments sont unipotents.

THÉORÈME (M. Ratner, 1990).— *Soit H un sous-groupe unipotent d'un groupe de Lie G et Γ un réseau de G. Pour tout x de $\Gamma\backslash G$, il existe un sous-groupe fermé $H(x)$ de G tel que l'adhérence de l'orbite $x.H$ de x par H dans $\Gamma\backslash G$ coïncide avec l'orbite $x.H(x)$ de x par $H(x)$.*

Cet énoncé n'est pas le meilleur possible ; nous en donnerons d'autres versions plus loin.

Il n'est pas surprenant que ce résultat ait des conséquences concernant les approximations diophantiennes. Avant la preuve du théorème précédent, G.A. Margulis avait développé des méthodes qui lui permirent de démontrer en 1987 la conjecture de A. Oppenheim [50].

THÉORÈME (G.A. Margulis, 1987).— *Soit Q une forme quadratique indéfinie et non dégénérée sur $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$). On suppose que Q n'est pas un multiple d'une forme rationnelle. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un vecteur v de $\mathbf{Z}^n$ tel que $0 < Q(v) < \varepsilon$.*

Par la suite, S.G. Dani et G.A. Margulis ont amélioré significativement ce théorème comme nous le verrons plus loin.

Les preuves des théorèmes de S.G. Dani-G.A. Margulis et M. Ratner sont longues et difficiles ; il n'est pas possible de les décrire ici. Dans cet exposé élémentaire, nous nous sommes fixés un but très modeste. Nous nous proposons d'illustrer les méthodes employées dans le cas simple où le groupe G est $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$: il s'agit alors d'étudier le flot horicyclique d'une surface à courbure -1. Ce cas renferme déjà une bonne partie des difficultés. Nous espérons que son étude préliminaire permettra au lecteur d'aborder plus facilement les preuves complètes qui sont publiées ou en cours de publication. Signalons par ailleurs l'existence de l'article [27] de S.G. Dani et G.A. Margulis qui propose une introduction élémentaire à ces questions d'approximations diophantiennes.

Ce rapport est organisé de la façon suivante. Le premier paragraphe est consacré à des motivations : il retrace l'histoire du flot horicyclique et mène à des énoncés plus précis des théorèmes de M. Ratner. Le paragraphe 2 décrit quelques méthodes utilisées par S.G. Dani et G.A. Margulis pour approcher la conjecture de M.S. Raghunathan. Le paragraphe 3 donne quelques ingrédients de la preuve de M. Ratner, toujours illustrés dans le cas de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Enfin, dans le paragraphe 4, nous discutons trois applications : valeurs des formes quadratiques sur les points entiers, phénomènes de rigidité ergodique et existence de laminations géodésiques sur les variétés hyperboliques.

1. LE FLOT HORICYCLIQUE

1.1. Les flots géodésiques et horicycliques des surfaces à courbure négative sont des exemples très riches de systèmes dynamiques. Leur analyse de plus en plus approfondie s'est faite en parallèle avec le développement de la théorie ergodique. Bien que ces flots aient des comportements topologiques et ergodiques très différents, on ne peut envisager d'étudier l'un sans l'autre.

Rappelons d'abord les définitions. Soit H^2 le demi-plan de Poincaré $\{x+iy \in \mathbf{C} \mid y>0\}$ muni de la métrique à courbure -1 donnée par $ds^2 = (dx^2+dy^2)/y^2$. Une géodésique de H^2 est une courbe $\gamma : \mathbf{R} \to H^2$ qui est un plongement isométrique. L'image d'une géodésique est un demi-cercle (ou une demi-droite) orthogonal à l'axe des x. Une géodésique est entièrement déterminée par son vecteur tangent en $t=0$, élément du fibré unitaire tangent T_1H^2 à H^2. Bien sûr, si γ est une géodésique et si $s \in \mathbf{R}$, l'application $\gamma^s : t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t+s) \in H^2$ est aussi une géodésique. Le groupe à un paramètre de transformations $\gamma \mapsto \gamma^s$ définit donc un flot sur l'espace des géodésiques, c'est-à-dire sur T_1H^2. C'est le *flot géodésique* de H^2.

Le groupe des isométries directes de H^2 est $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ opérant sur H^2 par $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Ce groupe opère librement et transitivement à gauche sur T_1H^2 et commute évidemment avec le flot géodésique. Il en résulte que ce flot géodésique peut aussi être considéré comme un groupe à un paramètre g^s de translations à droite sur $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$. On s'assure facilement que ce flot s'identifie à :

$$\begin{aligned} g^s : \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\in \mathrm{PSL}(2,\mathbf{R}) \\ \mapsto \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}&\begin{pmatrix} \exp(s/2) & 0 \\ 0 & \exp(-s/2) \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Soit $v \in T_1H^2$ et $\gamma : \mathbf{R} \to H^2$ la géodésique issue de v. Lorsque T tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), le cercle de centre (non euclidien) $\gamma(T)$ et passant par $\gamma(0)$ "converge" vers l'*horicycle* positif (resp. négatif) déterminé par v (voir figure 1). Dans le modèle de Poincaré, c'est un cercle tangent à l'axe des x (privé de son point de tangence) ou une droite parallèle à l'axe des x. En termes intrinsèques, ce sont les courbes de courbure ± 1.

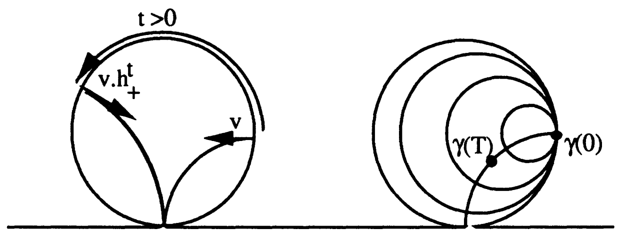

Figure 1

De même qu'avec les géodésiques, les horicycles permettent de définir un flot. Si v est un vecteur unitaire tangent à H^2 en un point z, et si t est un réel, on note $v.h^t_+$ le vecteur unitaire orthogonal à l'horicycle positif déterminé par v, en un point situé à une distance t de z le long de l'horicycle (voir la figure 1 pour les conventions d'orientation). Pour la même raison que précédemment, ce flot s'identifie à un groupe à un paramètre h^t_+ de translations à droite de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$.

On vérifie facilement qu'il s'agit de :

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . h^t_+ = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

En utilisant les horicycles négatifs, on construit de même un troisième flot h^t_- qui correspond bien sûr aux translations à droite par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Les deux flots h^t_+ et h^{-t}_- sont conjugués par la symétrie envoyant un vecteur v de $T_1 H^2$ sur son opposé. C'est pour cette raison que nous nous contenterons d'étudier h^t_+.

On notera que tous *ces flots préservent la mesure* de Haar (bi-invariante) de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. D'autre part, les champs de vecteurs invariants à gauche correspondant à g^s, h^t_+ et h^t_- forment une base de l'algèbre de Lie de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$.