Astérisque
331, 2010, p. 255–315

REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES ORDINAIRES DE $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ET COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL

par

Christophe Breuil & Matthew Emerton

Résumé. — On définit les représentations p-adiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ « correspondant » aux représentations potentiellement cristallines réductibles (et éventuellement scindées) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2 et on montre qu'elles apparaissent naturellement dans la cohomologie étale complétée de la tour en p des courbes modulaires.

***Abstract* (Ordinary p-adic representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ and local-global compatibility)**
We define p-adic representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ "corresponding" to 2-dimensional reducible (and possibly split) potentially crystalline representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ and we show that they naturally arise in the completed étale cohomology of the tower at p of the modular curves.

1. Introduction et notations

1.1. — Soient p un nombre premier et K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. À la suite des développements récents dans la théorie des représentations p-adiques de groupes p-adiques tels que $\mathrm{GL}_n(K)$ ([**44**], [**43**], [**45**], [**22**], [**25**], [**26**], etc.), la question s'est posée d'« associer » des représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_n(K)$ aux représentations p-adiques de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K)$ (par exemple aux représentations potentiellement semi-stables de Fontaine), dans l'esprit d'une éventuelle correspondance locale à la Langlands. Initiée par l'exemple dans [**7**] et [**8**] (mais suggérée depuis longtemps par de nombreux mathématiciens), cette problématique a déjà connu un certain nombre de développements ([**9**], [**18**], [**3**], [**19**]) et a pris le nom générique de « correspondance locale de Langlands p-adique ». Cette nouvelle correspondance s'annonce malheureusement beaucoup plus délicate que sa grande sœur locale ℓ-adique et,

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 11F.
Mots clefs. — Représentations galoisiennes ordinaires, correspondance de Langlands p-adique, cohomologie étale complétée.

Le premier auteur remercie A. Abbes, G. Chenevier, A. Iovita, C. Khare, M. Kurihara et A. Pál pour des discussions. Le deuxième auteur a bénéficié d'un soutien partiel de la NSF (grant DMS-0401545).

pour cette raison, les résultats (ou même les conjectures) non triviaux obtenus pour l'instant se limitent tous à GL_2, et même $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Dans cet article, nous nous proposons modestement d'explorer le cas, laissé jusqu'alors en suspens, des représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ correspondant aux représentations potentiellement cristallines de dimension 2 *réductibles* (et éventuellement scindées) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Nous définissons de telles représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour la plupart de ces représentations potentiellement cristallines. Nous montrons ensuite que, lorsque la représentation galoisienne provient d'une forme modulaire, alors la représentation associée de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ apparaît naturellement (avec la représentation galoisienne) dans la cohomologie étale complétée des courbes modulaires. C'est là le résultat de « compatibilité local-global » principal de l'article. Concrètement, il s'agit de montrer que l'on peut détecter côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans la cohomologie si la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ associée à la forme modulaire considérée est scindée ou non en p. Pour cela, nous utilisons deux ingrédients : d'une part les théorèmes de comparaison p-adiques (pour les représentations galoisiennes associées aux formes modulaires) et d'autre part la théorie p-adique du foncteur de Jacquet de l'un d'entre nous.

Décrivons maintenant plus précisément le contenu de l'article.

Soit $\sigma_p \simeq \begin{pmatrix} \eta_1 & * \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$ une représentation potentiellement cristalline réductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de poids de Hodge-Tate $(1-k, 0)$ pour un entier $k \geq 2$ (i.e. telle que η_1 est de poids 0 et η_2 de poids $2-k$) où ε désigne le caractère cyclotomique p-adique. On suppose de plus $\eta_1 \neq \eta_2$ si $k = 2$. L'extension $*$ est alors unique si elle est non-nulle. En voyant les caractères de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ comme des caractères de $\mathbb{Q}_p^\times$ via la réciprocité locale, on associe à σ_p un espace de Banach p-adique $B(\sigma_p)$ muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ comme suit :

(i) si $\sigma_p \simeq \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$, alors :

$$B(\sigma_p) = \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\right)^{\mathscr{C}^0} \oplus \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0},$$

(ii) si $\sigma_p \simeq \begin{pmatrix} \eta_1 & * \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$ avec $* \neq 0$ alors $B(\sigma_p)$ est une extension non scindée :

$$0 \to \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\right)^{\mathscr{C}^0} \to B(\sigma_p) \to \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0} \to 0,$$

où la notation $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta \otimes \eta'\right)^{\mathscr{C}^0}$ désigne les fonctions continues f sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans une extension finie (fixée) de $\mathbb{Q}_p$ telles que $f(bg) = (\eta \otimes \eta')(b)f(g)$ (l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ étant la translation usuelle à droite sur les fonctions). Le Banach $B(\sigma_p)$ dans le cas (ii) est obtenu en prenant l'unique complété p-adique unitaire de l'induite parabolique localement analytique (au sens de [**44**]) $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1 \mid\,\mid^{k-1} \varepsilon^{2-k} \otimes \eta_2 \mid\,\mid^{1-k} \varepsilon^{k-2}\right)^{\mathrm{an}}$ où $\mid\,\mid$ désigne le caractère norme (cf. §2.2). La définition de la correspondance ci-dessus peut donc se résumer par la phrase : « c'est scindé côté $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ si et seulement si c'est scindé côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ».

Considérons maintenant une forme modulaire $f = q + \sum_{n\geq 2} a_n(f)q^n$ parabolique nouvelle normalisée de poids $k \geq 2$, niveau N, caractère χ et vecteur propre des opérateurs de Hecke T_ℓ pour $(\ell, N) = 1$ et U_ℓ pour $\ell|N$. Notons $\sigma(f)$ la représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ associée à f et $\sigma_p(f)$ sa restriction à un sous-groupe de décomposition en p. Si M est la partie première à p de N et si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ sur laquelle f est définie, notons $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L \overset{\text{déf}}{=} L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \big($complété p-adique du $\mathbb{Z}_p$-module $\varinjlim_r H^1_{\text{ét}}(Y_1(M;p^r)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p)\big)$ où $Y_1(M;p^r)$ est la courbe modulaire ouverte associée au groupe de congruences $\Gamma_1(M) \cap \Gamma(p^r)$. On définit la composante $\sigma(f)$-isotypique :

$$\Pi_p(f) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f), \widehat{H}^1(K_1^p(M))_L\big)$$

qui est un espace de Banach p-adique naturellement muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On s'attend à ce que la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $\Pi_p(f)$ « contienne » exactement la « même information » que la représentation p-adique $\sigma_p(f)$, c'est-à-dire contienne la théorie de Hodge p-adique de la forme f (cf. e.g. [**9**]). Supposons maintenant que $\sigma_p(f)$ est de la forme précédente (i.e. potentiellement cristalline et réductible). Dans ce cas, notre conjecture de compatibilité local-global est alors précisément :

Conjecture 1.1.1. — *Il y a un isomorphisme topologique* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariant d'espaces de Banach p-adiques* $B(\sigma_p(f)) \simeq \Pi_p(f)$.

Le résultat principal du texte est une version faible de cette conjecture :

Théorème 1.1.2. — *(i) On a toujours une immersion fermée* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariante d'espaces de Banach p-adiques :*

$$B(\sigma_p(f)) \hookrightarrow \Pi_p(f).$$

(ii) Si $\sigma_p(f)$ *n'est pas scindée, on a de plus (avec les notations précédentes) :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(\sigma_p(f)), \Pi_p(f)\big) &= L \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}, \Pi_p(f)\Big) &= 0. \end{aligned}$$

Nous mentionnons maintenant les étapes pour démontrer le théorème 1.1.2. Pour simplifier, nous supposons dans la suite de l'introduction que f est telle que $a_p(f)$ est une unité p-adique (pour un plongement fixé $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$). Si N est premier à p, notons α_p et β_p les racines de $X^2 - a_p(f)X + p^{k-1}\chi(p)$ avec β_p unité p-adique et posons $\widetilde{f} = f(z) - \beta_p f(pz)$. Si p^r divise exactement N avec $r > 0$, posons $\widetilde{f} = f|_{w_{p^r}}$ où w_{p^r} est l'opérateur d'Atkin (cf. §4.1). Rappelons que l'opérateur θ sur les q-développements désigne qd/dq.

Théorème 1.1.3. — *La représentation* $\sigma_p(f)$ *est scindée si et seulement s'il existe une forme surconvergente g (nécessairement de pente nulle et de poids* $2-k$*) telle que* $\widetilde{f} = \theta^{k-1}(g)$.

Notons que le sens $\widetilde{f} = \theta^{k-1}(g) \Rightarrow \sigma_p(f)$ scindée est le plus facile (voir e.g. [**30**, Prop.11]). L'existence de g est plus subtile et est basée sur les théorèmes de comparaison p-adiques usuels combinés avec la théorie des formes modulaires surconvergentes. La forme g (lorsqu'elle existe) mérite le nom de forme compagnon surconvergente de f car le théorème 1.1.3 est un analogue en caractéristique 0 du théorème bien connu de Gross ([**33**]). Notons que les deux cas ($\sigma_p(f)$ scindée ou non) arrivent vraiment en pratique (par exemple, si f est CM, g existe toujours par [**13**, Prop.7.1] et $\sigma_p(f)$ est donc scindée). Certains cas du théorème 1.1.3 étaient déjà connus (par une méthode de relèvement à la caractéristique 0 du résultat de [**33**]) : cf. [**11**] et aussi [**30**, §6].

La preuve du deuxième résultat utilise de façon essentielle une version p-adique du foncteur de Jacquet définie et étudiée dans [**22**] et [**25**]. Disons qu'une forme surconvergente g de poids entier $k \geq 2$ est « mauvaise » si elle n'est pas dans l'image de l'opérateur θ^{k-1} (pour la définition précise de « mauvaise » voir la définition 5.4.1 et la proposition 5.4.4).

Théorème 1.1.4. — *Soit g une forme modulaire surconvergente de poids entier $k \in \mathbb{Z}$, niveau N, caractère χ, vecteur propre des opérateurs de Hecke et telle que $U_p g = \alpha_p g$ avec α_p non-nul. Supposons de plus que g n'est pas « mauvaise » lorsque $k \geq 2$. Alors on a une injection :*

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{nr}(\alpha_p^{-1})\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k} \otimes \mathrm{nr}(\alpha_p)\big)^{\mathrm{an}} \hookrightarrow \widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^g$$

où $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^g$ est l'espace propre de $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$ pour l'action des opérateurs de Hecke (hors Np) et pour les valeurs propres de g, χ_p est la composante en p du caractère des adèles finis de $\mathbb{Q}$ déduit de χ, $\mathrm{nr}(x)$ est le caractère non-ramifié de $\mathbb{Q}_p^\times$ envoyant p sur x et « an » désigne l'induite parabolique localement analytique.

En fait, un résultat plus précis est démontré dans le texte (où l'on utilise plutôt la cohomologie à support compact, cf. §5.5). Notons qu'une injection comme dans le théorème 1.1.4 n'est pas unique à cause de la présence de la représentation galoisienne associée à g (de dimension 2) dans l'espace propre $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^g$. Le théorème 1.1.4 s'obtient de la manière suivante : à la forme surconvergente g correspond un point de la courbe de Hecke (ou « eigencurve ») de Coleman-Mazur ([**17**]). Par la théorie de [**24**], si $J_B\big(\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L\big)$ est la représentation du tore de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ obtenue après application du foncteur de Jacquet p-adique J_B à $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$, à ce point est associé un sous-espace propre de $J_B\big(\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L\big)$ pour l'action du tore et des opérateurs de Hecke (hors Mp) : dans notre cas il s'agit du sous-espace propre pour le caractère $\mathrm{nr}(\alpha_p)\ |\ |\ \otimes \mathrm{nr}(\alpha_p^{-1})\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k}\ |\ |^{-1}$. On déduit alors grosso-modo le théorème 1.1.4 d'une loi d'adjonction pour le foncteur J_B (sauf dans un cas essentiel qui nécessite plus de travail, cf. ci-dessous).

On démontre alors le théorème 1.1.2 comme suit.
On montre d'abord facilement que le morceau $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\big)^{\mathscr{C}^0}$ est toujours contenu dans $\Pi_p(f)$. Supposons que $\sigma_p(f)$ est scindée. En appliquant le théorème 1.1.4 à la forme surconvergente g donnée par le théorème 1.1.3 et en tordant par

ε^{k-1}, on obtient une injection continue $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathrm{an}}\hookrightarrow\Pi_p(f)$ d'où une immersion fermée $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}\hookrightarrow\Pi_p(f)$. Ainsi $\Pi_p(f)$ contient dans ce cas la somme directe des deux induites paraboliques continues, c'est-à-dire $B(\sigma_p(f))$. Notons que l'on ne peut pas appliquer le théorème 1.1.4 à la forme surconvergente $\widetilde{f}$ car $\widetilde{f}$ est alors précisément « mauvaise ».
Supposons maintenant que $\sigma_p(f)$ n'est pas scindée. Alors, $\Pi_p(f)$ ne peut contenir le morceau $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}$ car en appliquant à l'inverse le raisonnement précédent et en utilisant la description cohomologique des formes surconvergentes ordinaires due à Hida, on aurait $\widetilde{f}$ dans l'image de θ^{k-1} ce qui impliquerait $\sigma_p(f)$ scindée (en fait, on montre une assertion un peu plus faible sur $\widetilde{f}$ qui suffit à entraîner $\sigma_p(f)$ scindée, cf. théorème 5.7.2). Mais le théorème 1.1.4 appliqué cette fois à la forme $\widetilde{f}$ (qui n'est plus « mauvaise ») donne une injection continue :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\mid\,\mid^{k-1}\varepsilon^{2-k}\otimes\eta_2\mid\,\mid^{1-k}\varepsilon^{k-2}\big)^{\mathrm{an}}\hookrightarrow\Pi_p(f)$$

d'où on déduit une immersion fermée $B(\sigma_p(f))\hookrightarrow\Pi_p(f)$ car, par définition, $B(\sigma_p(f))$ est l'unique complété p-adique unitaire de la représentation localement analytique $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\mid\,\mid^{k-1}\varepsilon^{2-k}\otimes\eta_2\mid\,\mid^{1-k}\varepsilon^{k-2}\big)^{\mathrm{an}}$. Avec un peu plus de travail, on obtient la multiplicité 1 du (ii) du théorème 1.1.2. Notons que le théorème 1.1.4 est dans ce cas particulièrement délicat car on est dans une situation de « pente critique » (i.e. on sort des conditions d'application du théorème d'Amice-Vélu et Vishik) et la démonstration de ce cas prend une bonne place de la partie 5.

Le texte est divisé comme suit : après cette introduction et les notations, la partie 2, purement locale, introduit diverses induites paraboliques pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ainsi que la construction des représentations $B(\sigma_p)$. La partie 3 est consacrée à la définition et aux premières propriétés du $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach p-adique $\Pi_p(f)$ (pour une forme modulaire propre f quelconque), puis à l'énoncé de la conjecture 1.1.1. La partie 4 contient la démonstration du théorème 1.1.3. Enfin, la partie 5 est consacrée à la démonstration du théorème 1.1.4, puis à celle du théorème 1.1.2. Un appendice conclut l'article, dans lequel on démontre une proposition technique mais importante pour la preuve du théorème 1.1.4.

1.2. — On fixe p un nombre premier. On note $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et $\overline{\mathbb{Q}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. On fixe des plongements $\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}_p}$. Pour $z\in\overline{\mathbb{Q}_p}$, $\mathrm{val}(z)\in\mathbb{Q}\cup\{+\infty\}$ est la valuation p-adique normalisée par $\mathrm{val}(p)=1$ et $\mid z\mid\overset{\text{déf}}{=}p^{-\mathrm{val}(z)}\in\mathbb{R}^+$. On note $\mathbb{A}$ les adèles de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}_f=\widehat{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ les adèles finis. On note aussi $\widehat{\mathbb{Z}}^p\overset{\text{déf}}{=}\prod_{\ell\neq p}\mathbb{Z}_\ell$ et $\mathbb{Z}_{Mp}^\times\overset{\text{déf}}{=}\varprojlim_n(\mathbb{Z}/Mp^n\mathbb{Z})^\times$ pour un entier M tel que $(M,p)=1$.

On normalise l'application de réciprocité du corps de classes local en envoyant les Frobenius arithmétiques sur les inverses des uniformisantes. On note ε le caractère cyclotomique p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et on remarque que, via la réciprocité locale en