443

ASTÉRISQUE

2023

PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS ON A ROUGH BACKGROUND

I
REGULARITY OF THE PHASE AT INITIAL TIME
II
CONSTRUCTION AND CONTROL AT INITIAL TIME

Jérémie SZEFTEL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 443, 2023

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 – Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`http://www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro: 54 € ($ 81)

Abonnement Europe: 665 €, hors Europe : 718 € ($ 1 077)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
`asterisque@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN 978-2-85629-977-7
10.24033/ast.1202

Directeur de la publication : Fabien Durand

443 ASTÉRISQUE

2023

PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS ON A ROUGH BACKGROUND

I
REGULARITY OF THE PHASE AT INITIAL TIME
II
CONSTRUCTION AND CONTROL AT INITIAL TIME

Jérémie SZEFTEL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Jérémie Szeftel
CNRS & Laboratoire Jacques-Louis Lions
Sorbonne Université
75005 Paris, France
jeremie.szeftel@sorbonne-universite.fr

Articles soumis en avril 2012 et acceptés en avril 2023.

***Mathematical Subject Classification* (2010). —** 83C05, 35Q75, 58J45 83C05, 35S30, 58J40.
***Keywords*. —** Einstein equations, wave equation, mean curvature flow, rough solutions, parametrix, Fourier integral operator.
***Mots-clefs*. —** Équations d'Einstein, équation des ondes, flot par courbure moyenne, solutions peu régulières, paramétrix, opérateur intégral de Fourier.

PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS ON A ROUGH BACKGROUND

I
REGULARITY OF THE PHASE AT INITIAL TIME
II
CONSTRUCTION AND CONTROL AT INITIAL TIME

by Jérémie SZEFTEL

Abstract. — This book is dedicated to the construction and the control of a parametrix to the homogeneous wave equation $\Box_{\mathbf{g}}\phi = 0$, where $\mathbf{g}$ is a rough metric satisfying the Einstein vacuum equations. Controlling such a parametrix as well as its error term when one only assumes L^2 bounds on the curvature tensor $\mathbf{R}$ of $\mathbf{g}$ is a major step of the proof of the bounded L^2 curvature conjecture proposed in [**10**], and solved jointly with S. Klainerman and I. Rodnianski in [**17**]. On a more general level, this book deals with the control of the eikonal equation on a rough background, and with the derivation of L^2 bounds for Fourier integral operators on manifolds with rough phases and symbols, and as such is also of independent interest.

Résumé. **(Parametrix pour l'équation des ondes sur un espace-temps peu régulier : I. Régularité de la phase à l'instant initial. II. Construction et contrôle à l'instant initial)** — Cet ouvrage est dédié à la construction et au contrôle d'une paramétrix pour l'équation des ondes homogène $\Box_{\mathbf{g}}\phi = 0$, où $\mathbf{g}$ est une métrique peu régulière satisfaisant les équations d'Einstein dans le vide. Le contrôle d'une telle paramétrix ainsi que du terme d'erreur associé lorsque l'on suppose seulement des bornes L^2 sur le tenseur de courbure $\mathbf{R}$ de $\mathbf{g}$ est une étape cruciale de la preuve de la conjecture de courbure L^2 proposée dans [**10**], et résolue conjointement avec S. Klainerman et I. Rodnianski dans [**17**]. Plus généralement, cet ouvrage concerne le contrôle de l'équation eikonale sur un espace-temps peu régulier et la dérivation de bornes L^2 pour des opérateurs intégraux de Fourier sur des variétés avec une phase et un symbole peu réguliers, et possède de ce point de vue un intérêt propre.

CONTENTS