

443

ASTÉRISQUE

2023

PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS
ON A ROUGH BACKGROUND

I

REGULARITY OF THE PHASE AT INITIAL TIME

II

CONSTRUCTION AND CONTROL AT INITIAL TIME

Jérémie SZEFTTEL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 443, 2023

Comité de rédaction

Marie-Claude ARNAUD Alexandru OANCEA
Christophe BREUIL Nicolas RESSAYRE
Eleonore DI NEZZA Rémi RHODES
Colin GUILLARMOU Sylvia SERFATY
Alessandra IOZZI Sug WOO SHIN
Eric MOULINES
Nicolas BURQ (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF AMS
Case 916 – Luminy P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9 Providence RI 02940
France USA
commandes@smf.emath.fr <http://www.ams.org>

Tarifs

Vente au numéro: 54 € (\$ 81)
Abonnement Europe: 665 €, hors Europe : 718 € (\$ 1077)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2023

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN 978-2-85629-977-7
10.24033/ast.1202

Directeur de la publication : Fabien Durand

443

ASTÉRISQUE

2023

PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS
ON A ROUGH BACKGROUND

I

REGULARITY OF THE PHASE AT INITIAL TIME

II

CONSTRUCTION AND CONTROL AT INITIAL TIME

Jérémie SZEFTTEL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Jérémie Szeftel
CNRS & Laboratoire Jacques-Louis Lions
Sorbonne Université
75005 Paris, France
jeremie.szeftel@sorbonne-universite.fr

Articles soumis en avril 2012 et acceptés en avril 2023.

Mathematical Subject Classification (2010). — 83C05, 35Q75, 58J45 83C05, 35S30, 58J40.

Keywords. — Einstein equations, wave equation, mean curvature flow, rough solutions, parametrix, Fourier integral operator.

Mots-clefs. — Équations d'Einstein, équation des ondes, flot par courbure moyenne, solutions peu régulières, paramétrix, opérateur intégral de Fourier.

PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS ON A ROUGH BACKGROUND

I

REGULARITY OF THE PHASE AT INITIAL TIME

II

CONSTRUCTION AND CONTROL AT INITIAL TIME

by Jérémie SZEFTTEL

Abstract. — This book is dedicated to the construction and the control of a parametrix to the homogeneous wave equation $\square_{\mathbf{g}}\phi = 0$, where \mathbf{g} is a rough metric satisfying the Einstein vacuum equations. Controlling such a parametrix as well as its error term when one only assumes L^2 bounds on the curvature tensor \mathbf{R} of \mathbf{g} is a major step of the proof of the bounded L^2 curvature conjecture proposed in [10], and solved jointly with S. Klainerman and I. Rodnianski in [17]. On a more general level, this book deals with the control of the eikonal equation on a rough background, and with the derivation of L^2 bounds for Fourier integral operators on manifolds with rough phases and symbols, and as such is also of independent interest.

Résumé. (Parametrix pour l'équation des ondes sur un espace-temps peu régulier : I. Régularité de la phase à l'instant initial. II. Construction et contrôle à l'instant initial) — Cet ouvrage est dédié à la construction et au contrôle d'une paramétrix pour l'équation des ondes homogène $\square_{\mathbf{g}}\phi = 0$, où \mathbf{g} est une métrique peu régulière satisfaisant les équations d'Einstein dans le vide. Le contrôle d'une telle paramétrix ainsi que du terme d'erreur associé lorsque l'on suppose seulement des bornes L^2 sur le tenseur de courbure \mathbf{R} de \mathbf{g} est une étape cruciale de la preuve de la conjecture de courbure L^2 proposée dans [10], et résolue conjointement avec S. Klainerman et I. Rodnianski dans [17]. Plus généralement, cet ouvrage concerne le contrôle de l'équation eikonale sur un espace-temps peu régulier et la dérivation de bornes L^2 pour des opérateurs intégraux de Fourier sur des variétés avec une phase et un symbole peu réguliers, et possède de ce point de vue un intérêt propre.

CONTENTS

Part I. Regularity of the phase at initial time	xi
1. Introduction	1
2. Main results	7
2.1. Modification of R and k near the asymptotic end	7
2.2. Geometry of the foliations generated by u on \mathcal{M} and by $u _{\Sigma}$ on Σ ..	8
2.3. Structure equations of the foliation generated by a function u on Σ .	9
2.4. Commutation formulas	11
2.5. The choice of $u(0, x, \omega)$	12
2.6. Main results	13
2.7. Coordinate systems on P_u and Σ	15
2.8. Additional estimates	15
3. Calculus inequalities	19
3.1. The Sobolev embedding on Σ	19
3.2. Embeddings compatible with the foliation generated by u on Σ	20
3.3. The Bochner identity and consequences	26
3.4. Parabolic and elliptic estimates	27
4. Construction of the foliation and regularity with respect to x	31
4.1. A priori estimates for lower order derivatives	32
4.2. A priori estimates for higher order derivatives	36
4.3. Construction of the foliation on a small strip	36
4.4. Proof of Theorem 2.4	37
5. Littlewood-Paley theory on P_u and consequences	39
5.1. Properties of the geometric Littlewood-Paley projections P_j	39
5.2. Control of K in $L_u^\infty H^{-\frac{1}{2}}(P_u)$	44
5.3. Estimates for the commutator $[\nabla_{aN}, P_j]$	52
5.4. Product estimates	53
5.5. Estimates for parabolic equations on S	54
6. Estimates for $\nabla_N a$ and $\nabla_N^2 a$ (proof of Theorem 2.5)	63
6.1. Proof of Proposition 6.2	64
6.2. Proof of Proposition 6.3	65
6.3. Proof of Lemma 6.5	70
6.4. Proof of Lemma 6.6	71

6.5. Proof of Lemma 6.7	72
7. Regularity of the foliation with respect to ω	75
7.1. First order derivatives with respect to ω	76
7.2. Second order derivatives with respect to ω	93
7.3. Third order derivatives with respect to ω	103
8. A global coordinate system on P_u and Σ	113
8.1. Proof of Proposition 2.8	113
8.2. The control of the Christoffel symbols	116
8.3. Proof of Proposition 2.9	117
9. Additional estimates	119
9.1. Proof of Proposition 2.10	119
9.2. Proof of Proposition 2.11	123
9.3. Proof of Proposition 2.12	124
A. Proof of Proposition 4.2 and Theorem 4.4	127
A.1. Proof of (4.47) for $j = 2$	127
A.2. End of the proof of Proposition 4.2	129
A.3. Proof of Lemma A.1	132
A.4. Proof of Lemma A.2	133
A.5. Proof of Theorem 4.4	135
A.6. Proof of Lemma A.3	138
A.7. Proof of Lemma A.5	140
A.8. Proof of Lemma A.6	141
A.9. Proof of Lemma A.7	144
B. Proof of the estimates for the commutator $[\nabla_{aN}, P_j]$	147
B.1. Proof of Proposition 5.14	147
B.2. Proof of Proposition 5.15	149
B.3. Proof of Corollary 5.16	151
B.4. Proof of Proposition 5.17	152
B.5. Proof of Proposition 5.18	154
B.6. Proof of Proposition 5.19	155
B.7. Proof of Proposition 5.20	158
C. Product estimates	161
C.1. Proof of Proposition 5.21	161
C.2. Proof of Proposition 5.22	162
C.3. Proof of Proposition 5.23	164
C.4. Proof of Proposition 5.24	165
C.5. Proof of Lemma 5.25	166
C.6. Proof of Lemma 5.26	167
C.7. Proof of Lemma 5.27	168
C.8. Proof of Lemma 5.28	170