Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UN THÉORÈME DE BEILINSON-BERNSTEIN POUR LES $\mathcal{D}$-MODULES ARITHMÉTIQUES

Christine Noot-Huyghe

Tome 137
Fascicule 2

2009

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 159-183

Bull. Soc. math. France
137 (2), 2009, p. 159–183

UN THÉORÈME DE BEILINSON-BERNSTEIN POUR LES $\mathcal{D}$-MODULES ARITHMÉTIQUES

PAR CHRISTINE NOOT-HUYGHE

RÉSUMÉ. — Un résultat important de la théorie des groupes, démontré indépendemment dans les années 80 par Beilinson et Bernstein, Brylinski et Kashiwara, est un résultat d'affinité des $\mathcal{D}$-modules sur la variété de drapeaux d'un groupe réductif sur le corps des nombres complexes. Nous donnons ici un analogue arithmétique de ce résultat, pour la catégorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur la variété de drapeaux d'un groupe réductif sur un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$.

ABSTRACT (*A Beilinson-Bernstein theorem for arithmetic $\mathcal{D}$-modules*)
An important result of group theory, independently proved during the years '80, by Beilinson and Bernstein, Brylinski and Kashiwara, is an affinity result for $\mathcal{D}$-modules on the flag variety of a reductive group over the field of complex numbers. We give here an arithmetic analogue of this result, for the category of arithmetic $\mathcal{D}$-modules on the flag variety of a reductive group over a discrete valuation ring of inequal characteristics $(0, p)$.

Texte reçu le 7 mai 2007, révisé le 3 juillet 2008, accepté le 12 septembre 2008

CHRISTINE NOOT-HUYGHE, IRMA, Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France • *E-mail :* `huyghe@math.u-strasbg.fr` • *Url :* `http://www-irma.u-strasbg.fr/~huyghe`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F17, 14F30.

Mots clefs. — Localisation, $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, variétés de drapeaux, théorèmes d'acyclicité.

This work has been supported by the research network Arithmetic Algebraic Geometry of the European Community (Programme FP6, contrat MRTN-CT2003-504917).

Introduction

Soit V un anneau de valuation discrète, d'inégales caractéristiques $(0,p)$. On considère ici les deux situations suivantes :

1. $S = \operatorname{spec} V$, le spectre de V, X est un S-schéma noethérien,
2. $\mathcal{S} = \operatorname{Spf} V$, le spectre formel de V, $\mathcal{X}$ un schéma formel noethérien sur $\mathcal{S}$.

Soit $\mathcal{A}$ un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$-algèbres, quasi-cohérent comme $\mathcal{O}_X$-module (resp. $\mathcal{A}$ un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres). Un $\mathcal{A}$-module sur le schéma X sera dit quasi-cohérent s'il est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. On dit que X (resp. $\mathcal{X}$) est $\mathcal{A}$-affine si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $\mathcal{A}$-module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ sur X (resp. tout $\mathcal{A}$-module cohérent sur $\mathcal{X}$) et tout $n \geq 1$ on a les égalités $H^n(X,\mathcal{M}) = 0$ (resp. $H^n(\mathcal{X},\mathcal{M}) = 0$).

(ii) Le foncteur Γ établit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{A}$-modules quasi-cohérents (resp. des $\mathcal{A}$-modules cohérents) et la catégorie des $\Gamma(X,\mathcal{A})$-modules (resp. des $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{A})$-modules de type fini).

Un énoncé important de la théorie des groupes est le théorème de Beilinson-Bernstein : soit G un groupe semi-simple sur $\mathbf{C}$, X une variété de drapeaux de G, $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{X}$, alors X est $\mathcal{D}_X$-affine. On se propose de donner ici un analogue arithmétique de cet énoncé, dans la situation qui suit. Soit G un groupe semi-simple sur S, ρ la demi-somme des racines positives de G, P un sous-groupe parabolique de G, $X = G/P$, $\mathcal{X}$ le schéma formel obtenu en complétant X le long de la fibre spéciale de S. Ce schéma est lisse et on peut s'intéresser au faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques sur $\mathcal{X}$ construit par Berthelot, que nous noterons $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$. On montre alors que $\mathcal{X}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-affine. Plus généralement, si λ est un caractère de G, $\mathcal{L}(\lambda)$ le faisceau inversible sur $\mathcal{X}$ associé au caractère λ (cf A.4), et $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\lambda)$ le faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques à valeurs dans $\mathcal{L}(\lambda)$, alors $\mathcal{X}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\lambda)$-affine pour tout poids λ tel que $\lambda+\rho$ est dominant et régulier.

En caractéristique 0, pour le faisceau $\mathcal{D}(\lambda)$ tel que $\lambda+\rho$ est dominant et régulier, le résultat est démontré indépendamment par Beilinson-Bernstein ([2]) et par Brylinski-Kashiwara ([8]) et joue un rôle essentiel dans la démonstration de la conjecture de multiplicité de Kazhdan-Lusztig ([18]).

En caractéristique $p > 0$, Haastert a montré que cet énoncé d'affinité était vérifié pour les espaces projectifs, ainsi que pour la variété de drapeaux de SL_3 ([13]). En revanche, Kashiwara-Lauritzen ont donné un contre-exemple à cet énoncé, pour le faisceau usuel $\mathcal{D}$ ([17]) défini dans [12] et pour la grassmanienne des sous-espaces vectoriels de dimension 2 d'un espace de dimension 5. Enfin, Bezrukavnikov, Mirkovic, Rumynin ont montré (3.2 de [5]) un analogue de ce résultat d'affinité en passant à la catégorie dérivée bornée des $\mathcal{D}^{(0)}$-modules cohérents sur X (i.e. les opérateurs différentiels sans puissances divisées) et sous la condition que p soit strictement plus grand que le nombre de Coxeter de G.

En caractéristique mixte, le résultat a été montré pour les espaces projectifs ([14]). Dans ce cas, on utilise de façon cruciale le fait que le faisceau tangent est très ample, ce qui caractérise l'espace projectif. Le point clé pour les variétés de drapeaux est que la catégorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents est engendrée par les modules induits (i.e. du type $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}\mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module cohérent). On utilise cette propriété pour montrer que si le résultat de $\mathcal{D}$-affinité est vrai algébriquement, pour le faisceau $\mathcal{D}_{X_K}$, alors il est vrai pour le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$ sur le schéma formel $\mathcal{X}$ (théorème 2.1).

Nous n'aborderons pas ici l'aspect localisation de Lie(G)-modules (ou plutôt des modules sur la complétion faible de Lie(G)), qui est bien entendu sous-jacent et fera l'objet d'un article ultérieur.

Nous remercions le referee pour sa lecture attentive et ses suggestions pertinentes pour améliorer la rédaction de ce texte.

1. Notations-Rappels

1.1. Notations. — Dans toute la suite, on note K le corps des fractions de V, π une uniformisante et k le corps résiduel de V. Soit G un groupe semi-simple sur S, P un sous-groupe parabolique de G. On rappelle que, par définition ([9]), un sous-groupe parabolique est plat sur S. Comme S est le spectre d'un anneau de Dedekind, le quotient $X = G/P$ est un S-schéma ([1]). On note N la dimension de X, et $\mathcal{X}$ le schéma formel associé par complétion à X.

D'une façon générale, si Z est un S-schéma, la lettre cursive $\mathcal{Z}$ désignera le schéma formel obtenu en complétant Z le long de l'idéal π, Z_k la fibre spéciale $Z_k = \operatorname{spec} k \times_S Z$ et Z_K la fibre générique $Z_K = \operatorname{spec} K \times_S Z$. On posera i_Z l'immersion fermée $Z_k \hookrightarrow Z$ et j_Z l'immersion ouverte $Z_K \to Z$ (on omettra éventuellement le Z dans les notations quand le contexte sera clair). On notera aussi

$$Z_i = Z \times_S \operatorname{spec}(S/\pi^{i+1}S).$$

Pour un faisceau $\mathcal{E}$ sur un S-schéma Z, on notera $\mathcal{E}_k = i^*\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_K = j^*\mathcal{E}$.

1.2. Coefficients p-adiques. — Fixons un entier m. Si $k_i \in \mathbf{N}$, on introduit q_{k_i} le quotient de la division euclidienne de k_i par p^m et pour un multi-indice $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_N)$ on définit

$$q_{\underline{k}}! = \prod_{i=1}^{N} q_{k_i}!.$$

Pour $k \leq l \in \mathbf{N}$, on pose

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{q_k!}{q_k! q_{l-k}!},$$

$$\left\langle \begin{matrix} l \\ k \end{matrix} \right\rangle = \binom{l}{k} \left\{ \begin{matrix} l \\ k \end{matrix} \right\}^{-1} \in \mathbf{Z}_{(p)},$$

et pour des multi-indices $\underline{k}$, $\underline{l} \in \mathbf{N}^N$, tels que $\underline{k} \leq \underline{l}$ (i.e. $k_i \leq l_i$ pour tout $1 \leq i \leq N$),

$$\left\langle \begin{matrix} \underline{l} \\ \underline{k} \end{matrix} \right\rangle = \prod_{i=1}^{N} \left\langle \begin{matrix} l_i \\ k_i \end{matrix} \right\rangle.$$

On définit de façon analogue les coefficients $\left\{ \begin{smallmatrix} \underline{l} \\ \underline{k} \end{smallmatrix} \right\}$ et $\binom{\underline{l}}{\underline{k}}$.

Décrivons maintenant les différents faisceaux d'opérateurs différentiels intervenant dans cette situation.

1.3. Opérateurs différentiels arithmétiques. — Dans cette partie, X est un S-schéma lisse et $\mathcal{X}$ est son complété formel le long de l'idéal engendré par π. On décrit les différents faisceaux d'opérateurs différentiels en coordonnées locales. Nous renvoyons à [12] et à [3] pour une définition intrinsèque de ces faisceaux. Soit U un ouvert affine lisse de X, $x_1, \ldots, x_N$ une famille de coordonnées locales sur X, $dx_1, \ldots, dx_N$ une base de $\Omega^1_X(U)$, $\partial_1, \ldots, \partial_N$ la base duale de $\mathcal{T}_X(U)$. Si $k_i \in \mathbf{N}$, on note $\partial_i^{[k_i]} = \partial_i / k_i!$ et pour un multi-indice $\underline{\partial}^{[\underline{k}]} = \prod_{i=1}^{N} \partial_i^{[k_i]}$. Alors on a la description suivante ([12])

$$\mathcal{D}_X(U) = \left\{ \sum_{\text{finies}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \mid a_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_X(U) \right\}.$$

Donnons maintenant une description des faisceaux d'opérateurs différentiels construits par P. Berthelot.

Soit $m \in \mathbf{N}$. P. Berthelot introduit les faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$, ainsi que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, leur complété p-adique sur $\mathcal{X}$. Notons

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} = q_{\underline{k}}! \underline{\partial}^{[\underline{k}]}.$$