

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UN CRITÈRE D'ÉPOINTAGE DES SECTIONS ℓ -ADIQUES

Niels Borne & Michel Emsalem

Tome 142
Fascicule 3

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 465-487

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un
périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 142, septembre 2014

Comité de rédaction

Jean BARGE	Daniel HUYBRECHTS
Gérard BESSON	Yves LE JAN
Emmanuel BREUILLARD	Julien MARCHÉ
Antoine CHAMBERT-LOIR	Laure SAINT-RAYMOND
Jean-François DAT	Wilhelm SCHLAG
Charles FAVRE	
Raphaël KRIKORIAN (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement Europe : 300 €, hors Europe : 334 € (\$ 519)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© *Société Mathématique de France* 2014

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

UN CRITÈRE D'ÉPOINTAGE DES SECTIONS ℓ -ADIQUES

PAR NIELS BORNE & MICHEL EMSALEM

RÉSUMÉ. — La conjecture d'épointage est apparue comme une approche de la célèbre conjecture des sections de Grothendieck. Nous nous intéressons à une forme faible de celle-ci en introduisant une généralisation directe d'un théorème d'Uwe Jannsen décrivant exactement quand l'homologie ℓ -adique d'une courbe ouverte est une représentation Galoisienne pure. Nous donnons aussi des exemples concrets de courbes modulaires pour lesquelles l'épointage est possible au niveau ℓ -adique.

ABSTRACT (*A criterion of cuspidalization of ℓ -adic sections*). — The cuspidalization conjecture emerged as an approach of Grothendieck's famous section conjecture. We address a weak form of it by using a slight generalization of a theorem of Uwe Jannsen which describes exactly when the ℓ -adic homology of an open curve is a pure Galois representation. We also give concrete examples of modular curves for which the cuspidalization is possible at the ℓ -adic level.

Texte reçu le 9 janvier 2012, révisé et accepté le 31 juillet 2012.

NIELS BORNE
MICHEL EMSALEM

Classification mathématique par sujets (2000). — 14H30, 14G05.

Mots clefs. — Géométrie anabélienne, cohomologie ℓ -adique.

N. Borne a été partiellement soutenu par le projet ANR-10-JCJC 0107.

Les auteurs ont été partiellement soutenus par le Labex CEMPI (ANR-11-LABX-0007-01) et l'ANR ARIVAF (ANR-10-JCJC 0107).

1. Introduction

Soit Y une courbe géométriquement connexe sur un corps k de type fini sur \mathbb{Q} . On dispose de la suite exacte courte des groupes fondamentaux étales

$$(*_Y) \quad 1 \rightarrow \pi_1(Y_{\bar{k}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(Y, \bar{x}) \rightarrow G_k \rightarrow 1$$

où \bar{k} est une clôture algébrique, $G_k = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ est le groupe de Galois absolu de k , et \bar{x} est un point géométrique de Y . Soient à présent X une courbe propre lisse géométriquement irréductible, et U le complémentaire dans X d'un diviseur D défini sur k . On s'intéresse dans cet article à la question suivante, dite d'épointage des sections :

*Les sections de la suite exacte $(*_X)$ se relèvent-elles en des sections de la suite exacte $(*_U)$?*

Une des motivations pour l'étude de ce problème est que la conjecture des sections pour X de genre au moins 2, qui affirme que toute section de $(*_X)$ provient d'un point k -rationnel de X , implique une réponse positive à la question de l'épointage des sections.

Réciproquement, il est bien connu des spécialistes qu'une réponse positive à la question de l'épointage des sections permettrait de réduire la conjecture des sections au cas de la droite projective privée d'un nombre fini de points. Pour donner un sens précis à cette assertion, on doit formuler une version de la conjecture des sections pour des courbes éventuellement non propres, où à chaque point à l'infini est associé un « paquet » de (classes de conjugaison de) sections, qui a le cardinal du continu.

Comme une référence pour cette réduction de la conjecture de sections semble faire défaut, nous en avons inclus une esquisse assez détaillée (voir §3.1), en prenant le parti de remplacer les courbes affines par des orbicourbes qui leur sont « homotopiquement équivalentes », mais dont la propreté permet un traitement beaucoup plus uniforme (voir §2.2), les « paquets » mentionnés ci-dessus correspondant à des limites projectives de points rationnels sur ces orbicourbes.

Nous nous limiterons à l'étude de la question de l'épointage des sections dans le cadre suivant. Pour tout nombre premier l , considérons la suite exacte

$$(*_Y)^{[ab,l]} \quad 1 \rightarrow H_1(Y_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l) \rightarrow \pi_1^{[ab,l]}(Y, \bar{x}) \rightarrow G_k \rightarrow 1$$

où $\pi_1^{[ab,l]}(Y, \bar{x})$ désigne le quotient de $\pi_1(Y, \bar{x})$ par le noyau du morphisme naturel $\pi_1(Y_{\bar{k}}, \bar{x}) \rightarrow H_1(Y_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$ du groupe fondamental « géométrique » vers son plus grand l -quotient abélien. Dans ce cadre se pose la question de l'épointage des sections l -adiques :

*Les sections de la suite exacte $(*_X)^{[ab,l]}$ se relèvent-elles en des sections de la suite exacte $(*_U)^{[ab,l]}$?*

Ce type de problème a été récemment soulevé par Mohamed Saïdi (voir [20]). On montrera dans cet article l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1. — *Soient k un corps de type fini sur \mathbb{Q} , G_k son groupe de Galois absolu, X/k une courbe propre et lisse, géométriquement connexe, $D \subset X$ un diviseur réduit, $U = X \setminus D$ l'ouvert complémentaire, et $\bar{x} \in U$ un point géométrique. On fixe une extension galoisienne finie k'/k contenant les corps de définition de tous les points de D et un nombre premier l ne divisant pas $[k' : k]$. On note $\mathbf{Pic}_{X/k}$ le schéma de Picard de X , et $\mathbf{Pic}_{X,D/k}$ celui de la courbe obtenue à partir de X en pinçant D en un unique point rationnel (voir §3.3). On fait les deux hypothèses suivantes :*

1. *Il existe un entier naturel $N \geq 1$ premier à l et un point rationnel $p : \text{Spec } k \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^N$ tel que D soit inclus dans la fibre du morphisme composé $X \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^1 \xrightarrow{\times N} \mathbf{Pic}_{X/k}^N$ en p ,*
2. *la classe de $\mathbf{Pic}_{X,D}^1$ appartient au sous-groupe l -divisible maximal du groupe $H^1(G_k, \mathbf{Pic}_{X,D}^0)$.*

Alors toute section du morphisme naturel $\pi_1(X, \bar{x})^{[ab,l]} \rightarrow G_k$ se relève en une section du morphisme $\pi_1(U, \bar{x})^{[ab,l]} \rightarrow G_k$.

Voici un aperçu de la preuve du théorème 1. La deuxième condition du théorème équivaut, d'après [13], à l'existence d'une section du morphisme $\pi_1^{[ab,l]}(U, \bar{x}) \rightarrow G_k$. Le problème revient alors à montrer la surjectivité de l'application $H^1(G_k, H_1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)) \rightarrow H^1(G_k, H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l))$. Une condition suffisante — beaucoup plus forte *a priori* que la condition d'épointage des sections l -adiques — est, bien entendu, que $H_1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$, qui est *a priori* une extension de $H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$ par un module de Tate qu'il est facile de décrire en fonction des pointes, soit en fait une somme directe de ces deux représentations galoisiennes pures : on dira que l'homologie de U est pure. Nous utilisons alors, en le généralisant un peu, un théorème d'Uwe Jannsen (voir théorème 13), pour prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Supposons que tous les points de D soient rationnels sur une extension galoisienne finie k' de k de degré premier à l . L'épimorphisme*

$$H_1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l) \twoheadrightarrow H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$$

admet une section G_k -invariante si et seulement si géométriquement (c'est-à-dire sur \bar{k}), pour tous z, z' dans le support de D , le diviseur $z' - z$ est de torsion première à l dans la jacobienne de X .