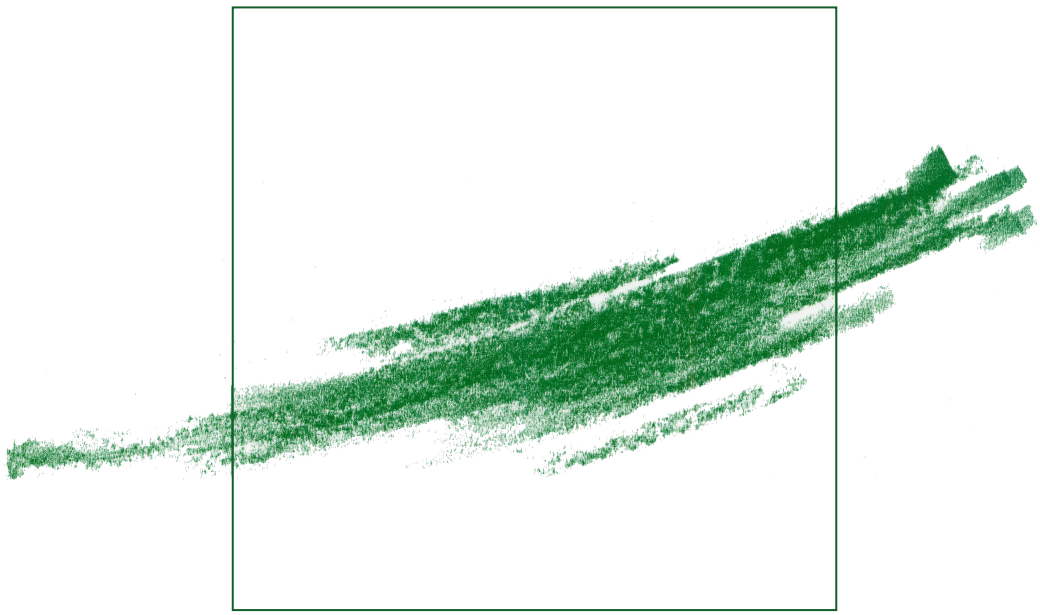
COURS SPÉCIALISÉS
COLLECTION SMF

Transformations birationnelles de petit degré

Dominique CERVEAU & Julie DÉSERTI



19

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DE PETIT DEGRÉ

Dominique Cerveau

Julie Déserti

Comité de rédaction

Antoine CHAMBERT-LOIR Bertrand MAURY
Julie DÉSERTI
Grégory MIERMONT (Directeur)

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS	EDP Sciences
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248	17, avenue du Hoggar
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940	91944 les Ulis Cedex A
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA	France
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org	www.epdsciences.com

Tarifs

Vente au numéro : 72 € ($ 108)
Prix membre : 50 €

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2013*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-372-0

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

COURS SPÉCIALISÉS 19

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DE PETIT DEGRÉ

Dominique Cerveau
Julie Déserti

Société Mathématique de France 2013

À la mémoire de Felice Ronga qui aurait sans doute aimé ce texte,

D. C.

À ceux dont, par pudeur, je parle peu,
avec une pensée particulière pour celui qui s'est éclipsé,

J. D.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1
Préliminaires : groupe de Cremona 1
Génération du groupe de Cremona 3
Sous-groupes spéciaux du groupe de Cremona : sous-groupes finis, sous-groupes d'invariance... 4
Automorphismes et alternative de Tits : analogie avec les groupes linéaires 7
Propriétés et résultats de nature algébrico-dynamique 8
Représentations de réseaux dans le groupe de Cremona et applications ... 10
Transformations rationnelles et birationnelles quadratiques 12
Germes de flots birationnels quadratiques 15
Transformations rationnelles, feuilletages, conjugaison dans les Σ^i 16
Quelques propriétés dynamiques des transformations birationnelles quadratiques 17
Des propriétés algébriques du groupe de Cremona 18
Transformations birationnelles de degré 3 19
Remerciements 23
À l'attention du lecteur 23

1. Transformations rationnelles et birationnelles quadratiques 25
1.1. Quelques définitions et notations 25
1.2. Transformations rationnelles quadratiques 27
1.3. Critère de birationnalité 29
1.4. Relations et transformations birationnelles, second critère de birationnalité 34
1.4.1. Calculs explicites d'espaces de relations linéaires 34
1.4.2. Critère de birationnalité 36
1.4.3. Paramétrisation de l'adhérence de Bir_2 39
1.5. Quelques orbites sous l'action gauche-droite 41
1.5.1. Orbites génériques et feuilletage par les orbites 42
1.5.2. Lieu singulier 44
1.5.3. Orbites spéciales 46
1.6. Conditions d'incidence ; lissité de Bir_2 et non lissité de $\overline{\mathrm{Bir}_2}$ 48

2. Germes de flots birationnels quadratiques 53

2.1. Généralités sur les germes de flots birationnels quadratiques 53
2.1.1. Quelques rappels utiles 53
2.1.2. Propriétés des germes de flots dans Bir_2 55
2.1.3. Deux résultats sur les germes de flots dans Bir_n 66
2.2. Classification des germes de flots birationnels quadratiques 67
2.2.1. La seconde composante du flot est triviale, *i.e.*, $\varepsilon = 0$ 68
2.2.2. La seconde composante du flot est une translation, *i.e.*, $\varepsilon = 1$ 70
2.2.3. La seconde composante du flot est une homothétie 76
2.2.4. Récapitulatif 88

3. Transformations rationnelles, feuilletages, conjugaison dans les Σ^i 99
3.1. Généralités 99
3.2. Transformations birationnelles quadratiques et feuilletages 103
3.3. Relations de type Lefschetz, Baum-Bott 105
3.4. Conjugaison birationnelle entre éléments de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ 108
3.5. Conjugaison birationnelle entre éléments de Σ^3 110
3.6. Conjugaison birationnelle entre automorphismes de Hénon 114

4. Quelques propriétés dynamiques des transformations birationnelles quadratiques 117
4.1. Stabilité algébrique 117
4.2. Feuilletages et courbes invariants pour des transformations du type $A\sigma$ 120
4.2.1. Feuilletages invariants 120
4.2.2. Courbes invariantes 121
4.3. Exemples de transformations quadratiques préservant une fibration rationnelle 133
4.4. Transformations ayant une courbe de points fixes 134
4.5. Points d'indétermination des itérés, points périodiques 137
4.5.1. Points d'indétermination, ensembles exceptionnels 137
4.5.2. Points périodiques 140
4.6. Transformations birationnelles quadratiques de carré quadratique 143
4.6.1. Cas non génériques 148

5. Propriétés algébriques du groupe de Cremona 151
5.1. Le groupe de Cremona ne se plonge pas dans un $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ 151
5.2. Centralisateur d'une transformation $A\sigma$ générique 152
5.3. Construction de sous-groupes libres 154
5.4. Au sujet de la simplicité 155
5.4.1. Premiers calculs de $\mathrm{N}\big(f, \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)\big)$ et conséquences 156
5.4.2. Description du sous-groupe normal de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ engendré par une transformation birationnelle quadratique 157
5.4.3. Calculs de $\mathrm{N}\big(f, \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)\big)$ dans un cadre un peu plus général 159
5.5. Une version un peu plus forte du Théorème de Nœther 160