JACQUES TITS

Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody

Astérisque, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 700, p. 7-31
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1988-1989__31__7_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1988
41ème année, 1988-89, n° 700

GROUPES ASSOCIÉS AUX ALGÈBRES DE KAC-MOODY

par Jacques TITS

1. PRÉLIMINAIRES ET POSITION DU PROBLÈME

1.1. Une matrice carrée $A = (A_{ij})_{i,j\in I}$ est appelée *matrice de Cartan généralisée* si I est un ensemble fini (hypothèse souvent superflue), $A_{ii} = 2$ pour tout $i \in I$, $A_{ij} \in -\mathbf{N}$ si $i \neq j$ et $A_{ij} = 0$ implique $A_{ji} = 0$. Si, de plus, A est produit d'une matrice diagonale par une matrice symétrique (resp. symétrique définie positive), elle est dite *symétrisable* (resp. appelée *matrice de Cartan*). On sait, depuis W. Killing et E. Cartan, que les classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie complexes semi-simples sont en correspondance bijective naturelle avec les matrices de Cartan : une présentation simple de l'algèbre correspondant à la matrice A consiste en un système générateur $(e_i, f_i, h_i)_{i\in I}$ de $3 \operatorname{card} I$ éléments assujettis aux relations suivantes, où $i,j \in I$:

$$[h_i,h_j] = 0 ,$$
$$[h_i,e_j] = A_{ij}e_j \quad , \quad [h_i,f_j] = -A_{ij}f_j ,$$
$$[e_i,f_i] = -h_i ,$$
$$\text{si } i \neq j , \quad [e_i,f_j] = (\operatorname{ad} e_i)^{-A_{ij}+1}(e_j) = (\operatorname{ad} f_i)^{-A_{ij}+1}(f_j) = 0$$

(*cf.* p. ex. [Ser 1]). Pour toute matrice de Cartan généralisée, on note $\mathfrak{g}(A)$ l'algèbre de Lie définie par cette même présentation ; si A n'est pas une matrice de Cartan, $\dim \mathfrak{g}(A) = \infty$. Les algèbres $\mathfrak{g}(A)$, appelées *algèbres de Kac-Moody*, ont fait récemment l'objet de nombreux travaux ; la référence de base en ce qui les concerne est [Kac 2].

Les algèbres de Lie (de dimension finie) n'étaient, à l'origine, qu'un outil commode pour l'étude de ce que Lie, Killing et Cartan appelaient "groupes continus finis", et il est naturel de se demander si l'on peut aussi obtenir des groupes intéressants par "intégration" des algèbres $\mathfrak{g}(A)$. C'est la version la plus simple du problème qui fait l'objet du présent exposé.

S.M.F.
Astérisque 177-178 (1989)

1.2. Plus généralement, soit $\mathcal{D} = (I,\Lambda,(\alpha_i)_{i\in I},(\alpha_i^\vee)_{i\in I})$ la donnée constituée par un ensemble fini I, un groupe abélien libre Λ, dont le $\mathbf{Z}$-dual est noté $\Lambda^\vee$, et des systèmes indexés par I d'éléments $\alpha_i \in \Lambda$ et $\alpha_i^\vee \in \Lambda^\vee$. Ces notations seront conservées tout au long de l'exposé et l'on supposera toujours que la matrice $A = (A_{ij})$, avec $A_{ij} = \alpha_j(\alpha_i^\vee)$, est une matrice de Cartan généralisée.

Lorsque A est une matrice de Cartan, un résultat fondamental de C. Chevalley ([Ch 2]), précisé par M. Demazure ([De]), attache à $\mathcal{D}$ un *schéma en groupes réductifs déployés* $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}$: Λ est le groupe des caractères d'un tore déployé maximal, $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une base du système de racines relatif à ce tore et $\alpha_i^\vee$ est la coracine associée à α_i. L'importance des schémas en groupes $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}$ réside notamment dans le fait que, si K est un corps algébriquement clos, la correspondance $\mathcal{D} \longleftrightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{D},K}$ met les systèmes $\mathcal{D}$ du type envisagé en bijection avec les K-groupes réductifs connexes.

La question se pose de généraliser la construction de $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}$ à un système $\mathcal{D}$ quelconque (sans restriction sur la matrice de Cartan généralisée A). L'exemple du numéro 1.3 ci-après laisse prévoir l'existence de plusieurs façons d'aborder ce problème, conduisant à des solutions de nature différentes quoique liées entre elles. Le présent exposé sera principalement consacré à la description de deux objets, notés $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$ ($\mathfrak{E}$ pour "élémentaire") et $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}$. Le premier, que l'on pourrait appeler le "foncteur minimal" associé à $\mathcal{D}$, est un foncteur en groupes sur la catégorie des anneaux ; il ne généralise pas à proprement parler $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}$ (rappelons que les schémas en groupes sont des foncteurs en groupes particuliers !), mais si A est une matrice de Cartan, il existe un homomorphisme canonique $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{D}}$ qui est un isomorphisme sur tout anneau euclidien (par exemple, sur tout corps). Quant à $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}$, c'est un ind-schéma en groupes qui se réduit précisément à $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}$ lorsque A est une matrice de Cartan. Sur un corps K, le groupe $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}(K)$ est le complété de $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(K)$ pour une topologie convenable. A un détail de définition près, le foncteur $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$ a été introduit dans [Ti 6] (et même déjà, en substance, dans [Ti 2]). La construction, beaucoup plus subtile, de $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}$, est due à O. Mathieu (*cf.* [Mat 5], [Mat 7]).

A une matrice de Cartan généralisée A donnée sont associées canoniquement plusieurs données $\mathcal{D}$; les plus importantes sont :

– la *donnée adjointe* $\mathcal{D}_{ad}$, obtenue en prenant pour α_j le vecteur $(A_{ij})_{i\in I}$ de $\mathbf{Z}^I$ et pour Λ le sous-groupe de $\mathbf{Z}^I$ engendré par les α_j, ce qui détermine $\Lambda^\vee$ et les $\alpha_i^\vee$ (lorsque A est inversible, on a $\Lambda = \coprod_{j\in I} \mathbf{Z}\,\alpha_j$) ;

– la *donnée simplement connexe* $\mathcal{D}_{sc}$, caractérisée par la relation $\Lambda^\vee = \coprod_{i\in I} \mathbf{Z}\,\alpha_i^\vee$;

– la *donnée universelle* $\mathcal{D}_{un}$, obtenue en prenant pour Λ, $\Lambda^\vee$ deux copies de $\mathbf{Z}^{2\,\mathrm{Card}\,I}$, dont les bases canoniques sont notées $(u_j,v_j)_{j\in I}$, $(u_i',v_i')_{i\in I}$, en posant $\alpha_j = u_j$, $\alpha_i^\vee = v_i'$, et en mettant Λ et $\Lambda^\vee$ en $\mathbf{Z}$-dualité par la forme bilinéaire représentée par la matrice $\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, où $n = \mathrm{Card}\, I$.

Nous simplifierons les notations en écrivant $\mathfrak{E}_{A,ad}$, $\mathfrak{E}_{A,sc}$, $\hat{\mathfrak{G}}_{A,ad}$, $\hat{\mathfrak{G}}_{A,sc}$ pour $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}_{ad}(A)}$, etc. Les *groupes adjoints* $\mathfrak{E}_{A,ad}(\mathbf{C})$, $\hat{\mathfrak{G}}_{A,ad}(\mathbf{C})$, et *simplement connexes* $\mathfrak{E}_{A,sc}(\mathbf{C})$, $\hat{\mathfrak{G}}_{A,sc}(\mathbf{C})$, fournissent des réponses - parmi d'autres - au problème posé à la fin du n° 1.1.

1.3. Exemple

Soient $\mathfrak{H}$ un schéma de Chevalley quasi-simple, simplement connexe, Λ le groupe des caractères d'un tore déployé maximal, $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ une base du système de racines relatif à ce tore, α_0 l'opposée de la plus grande racine, I l'ensemble $\{0,1,\dots,\ell\}$, $\alpha_i^\vee \in \Lambda^\vee$ la coracine de $\mathfrak{H}$ correspondant à α_i pour $i \in I$ et $\mathcal{D} = (I, \Lambda, (\alpha_j)_{j\in I}, (\alpha_i^\vee)_{i\in I})$. La matrice $A = (\alpha_i^\vee(\alpha_j))$ est la matrice de Cartan généralisée décrite par le graphe de Dynkin complété de $\mathfrak{H}$ (*cf.* [Bo], VI.4.3). Si $\mathfrak{h}$ désigne l'algèbre de Lie du groupe algébrique complexe $\mathfrak{H}(\mathbf{C})$, on sait (voir p. ex. [Kac 2], chap. 7) que $\mathfrak{g}(A)$ est extension centrale de $\mathfrak{h} \otimes \mathbf{C}[t,t^{-1}]$ par $\mathbf{C}$. Ce fait, en plus d'autres considérations que nous ne développons pas ici, suggère que, pour la donnée $\mathcal{D}$ qui vient d'être décrite, une solution naturelle du problème posé au n° 1.2 est le foncteur en groupes $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}} : R \longmapsto \mathfrak{H}(R[t,t^{-1}])$, où R désigne un anneau (la disparition de l'extension centrale est due au choix que nous avons fait pour Λ : si l'on remplaçait $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}_{sc}(A)$, on aurait plutôt à considérer une extension centrale de $\mathfrak{H}(R[t,t^{-1}])$ par $R^\times$). Il s'avère que $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}$ coïncide effectivement avec $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$ sur les corps (*cf.* le § 4 ci-dessous) ; comme foncteur sur la catégorie de tous les anneaux, $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}$ est sans doute plus naturel que $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$.

Une variante du foncteur précédent, et qui se prête mieux à une interprétation algébro-géométrique, est son "complété à l'infini" $R \longmapsto \mathfrak{H}(R((t)))$. Soient K un corps parfait et B un sous-groupe d'Iwahori de $\mathfrak{H}(K((t)))$ (*cf.* [BrT 2]). On sait (*loc. cit.*) que B est le groupe des points entiers d'un $K[[t]]$-schéma en groupes lisse de fibre générique $\mathfrak{H}_{K((t))}$. Par application du foncteur de Greenberg, on obtient sur B une structure de groupe proalgébrique (sur K) et il est indiqué dans l'introduction de [BrT 1] que, via la décomposition en doubles classes modulo B , on devrait pouvoir en déduire une structure de groupe ind-proalgébrique sur $\mathfrak{H}(K((t)))$. Cette structure n'a jamais été explicitée jusqu'ici, mais il me semble très probable que l'ind-schéma de Mathieu fournit la solution de ce problème (sans rien dire toutefois du cas d'inégale caractéristique, qui est aussi considéré dans [BrT 1]).

1.4. Quoiqu'il en soit, l'exemple précédent fait apparaître deux différences essentielles entre les foncteurs $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$ et $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}$: le premier est de nature plutôt arithmétique et fait jouer un rôle symétrique aux e_i et aux f_i , donc aux racines positives et négatives, tandis que le second, qui est de nature algébro-géométrique, privilégie les e_i , ce qui correspond au choix de l'un des deux points à l'infini de Spec $K[t,t^{-1}]$.

De manière générale, la plupart des solutions données dans la littérature au problème de l'"intégration" des algèbres de Kac-Moody peuvent se classer en solutions *de type minimal*, qui coïncident avec $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$ sur les corps (mais peuvent en différer sur des anneaux plus généraux, comme le foncteur $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}$ du n° 1.3 par exemple), et solutions *de type formel*, qui sont des complétées des précédentes. (Nous ne chercherons pas à donner un sens plus précis à ces expressions, utilisées au paragraphe suivant dans un but descriptif.) Echappent à cette classification les solutions *de type analytique*, de R. Goodman et N. Wallach (pour des matrices A de type affine standard : *cf.* [GoW]), et les groupes de R. Marcuson [Mar], qu'on peut voir comme un premier pas vers une complétion mais qui sont cependant encore de nature purement algébrique (non topologique).

1.5. L'intérêt des groupes associés aux algèbres de Kac-Moody dépasse celui d'une simple généralisation formelle du cas classique à la dimension infinie. Cela ressort notamment des observations suivantes.

Conservons les notations de 1.3. Il résulte facilement de la définition et des propriétés élémentaires de $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$ que, si K est un corps, le groupe $\mathfrak{E}_{A,sc}(K)$ est une extension centrale non triviale de $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(K) = \mathcal{H}(K[t,t^{-1}])$ par $K^\times$. Par complétion, on en déduit une extension centrale non triviale de $\mathcal{H}(K((t)))$ par $K^\times$, laquelle est sans aucun doute le groupe $\hat{\mathfrak{G}}_{A,sc}(K)$. L'existence de ces extensions centrales est loin d'être évidente d'un point de vue classique (voir les références du n° 1.6).

La théorie de Kac-Moody semble bien être le cadre naturel pour l'étude des *variétés de Schubert* qui sont toujours, quelle que soit la matrice A , des variétés *de dimension finie* (ou, dans la version de Mathieu, des schémas de type fini). La remarque suivante est significative à cet égard. Rappelons d'abord que les surfaces algébriques complexes compactes réglées rationnelles et non singulières, ou "surfaces de Hirzebruch", traditionnellement notées Σ_n , sont classées par un invariant entier positif n (*cf.* p. ex. [BaPV], p. 141). Il s'avère que si G désigne le groupe $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}(\mathbf{C})$ (ou, indifféremment, $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{C})$) et B un sous-groupe de Borel, la sous-variété de Schubert de G/B correspondant à l'élément $r_i r_j$ du groupe de Weyl $(i,j \in I\ ,\ i \neq j)$ est une surface Σ_n pour $n = -A_{ij}$ (*cf.* [Ti 1], 4.2, ou [Ti 2], 8.3.e)). Ainsi, les variétés de Schubert de dimension 2 des quotients G/B de "groupes de Kac-Moody" ne sont autres que les surfaces Σ_n , mais si l'on considère seulement les groupes simples G de