Astérisque
347, 2012, p. 1–102

CALCUL D'UNE VALEUR D'UN FACTEUR ε PAR UNE FORMULE INTÉGRALE

par

Jean-Loup Waldspurger

Introduction

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, V un espace vectoriel de dimension finie sur F, muni d'une forme quadratique non dégénérée q, D_0 une droite de V qui n'est pas isotrope pour q, W l'orthogonal de D_0 dans V. Notons G le groupe spécial orthogonal de V et H celui de W, que l'on identifie à un sous-groupe de G. Soient π, resp. ρ, une représentation admissible irréductible de $G(F)$, resp. $H(F)$, que l'on réalise dans un espace E_π, resp. E_ρ. Notons $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \rho)$ l'espace des applications linéaires $\varphi : E_\pi \to E_\rho$ telles que $\varphi \circ \pi(h) = \rho(h) \circ \varphi$ pour tout $h \in H(F)$. Notons $m(\rho, \pi)$ la dimension de cet espace. D'après un théorème de Aizenbud, Gourevitch, Rallis et Schiffmann ([**1**]), on a $m(\rho, \pi) \leq 1$. Supposons π et ρ tempérées. Dans les articles [**12**] et [**14**], on a établi une formule qui calcule $m(\rho, \pi)$ comme somme d'intégrales sur des sous-tores non nécessairement maximaux de H de fonctions qui se déduisent des caractères de π et ρ. D'après les travaux encore en cours d'Arthur, la théorie de l'endoscopie tordue relie les représentations π et ρ, ou plus exactement les L-paquets qui contiennent ces représentations, à des représentations autoduales de groupes linéaires. Indiquons plus précisément de quel groupe linéaire il s'agit, par exemple pour la représentation π. Notons d la dimension de V. Si d est pair, le groupe est GL_d. Si d est impair, G apparaît usuellement comme groupe endoscopique de GL_{d-1} tordu. Mais G est aussi un groupe endoscopique de GL_d tordu et, pour ce que nous faisons, il semble que cette deuxième interprétation soit plus pertinente. D'après la conjecture locale de Gross-Prasad, le nombre $m(\rho, \pi)$ doit être relié à un facteur ε de la paire de représentations de groupes linéaires correspondant à la paire (ρ, π). Cela suggère l'existence d'une formule intégrale, parallèle à celle évoquée ci-dessus, qui calcule ce facteur ε de paire. Inversement, une telle formule devrait permettre, via la théorie de l'endoscopie tordue, de prouver la conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées. Le but de l'article est d'établir cette formule intégrale.

Oublions maintenant les objets introduits ci-dessus, qui n'ont servi que de motivation. On conserve toutefois le corps F. Soient r et m deux entiers positifs ou nuls. Posons $d = m + 1 + 2r$, $G = GL_d$, $H = GL_m$. Soit π une représentation admissible irréductible et tempérée de $G(F)$. On suppose π autoduale, c'est-à-dire qu'elle est isomorphe à sa contragrédiente $\pi^\vee$. Soit ρ une représentation de $H(F)$ vérifiant des conditions similaires. Notons θ_d l'automorphisme de G défini par $\theta_d(g) = J_d {}^tg^{-1} J_d^{-1}$, où J_d est la matrice antidiagonale de coefficients $(J_d)_{i,d+1-i} = (-1)^i$. Introduisons le groupe non connexe $G \rtimes \{1, \theta_d\}$ et sa composante connexe $\tilde{G} = G\theta_d$. Puisque π est autoduale, elle se prolonge en une représentation du groupe non connexe $G(F) \rtimes \{1, \theta_d\}$. Elle se prolonge même de deux façons. Fixons un caractère $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ continu et non trivial. La théorie des modèles de Whittaker permet de choisir l'un des prolongements. On note $\tilde{\pi}$ la restriction de ce prolongement à $\tilde{G}(F)$. On effectue des constructions analogues pour H et ρ. Selon Jacquet, Piatetskii-Shapiro et Shalika, on définit le facteur $\varepsilon(s, \pi \times \rho, \psi)$ pour $s \in \mathbb{C}$. Notons ω_π et ω_ρ les caractères centraux de π et ρ. Soit enfin ν un élément de $F^\times$. On pose

$$\varepsilon_\nu(\tilde{\pi}, \tilde{\rho}) = \omega_\pi((-1)^{[m/2]}2\nu)\omega_\rho((-1)^{1+[d/2]}2\nu)\varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi).$$

C'est ce terme que nous allons calculer par une formule intégrale.

Remarque. — Pour éviter un piège, signalons que l'équation fonctionnelle locale n'entraîne pas que ce terme est un signe ± 1, mais seulement que c'est une racine quatrième de l'unité.

Pour manier plus aisément les objets $\tilde{G}$ et $\tilde{H}$, on les interprète comme des groupes tordus. Soient V un espace vectoriel de dimension d sur F, W un sous-espace de dimension m et Z un sous-espace de V supplémentaire de W. Par le choix d'une base de V, G s'identifie au groupe $GL(V)$ des automorphismes linéaires de V. Notons V^* l'espace dual de V. Alors $\tilde{G}$ s'identifie à l'espace $\mathrm{Isom}(V, V^*)$ des isomorphismes linéaires de V sur V^* ou, si l'on préfère, à l'espace des formes bilinéaires non dégénérées sur V. Le groupe G agit à droite et à gauche sur $\tilde{G}$ par

$$(g, \tilde{x}, g') \mapsto {}^tg^{-1} \circ \tilde{x} \circ g'$$

pour $g, g' \in G$ et $\tilde{x} \in \tilde{G}$. On note simplement $(g, \tilde{x}, g') \mapsto g\tilde{x}g'$ ces actions. Le point base θ_d s'identifie à une forme symplectique si d est pair, à une forme quadratique si d est impair. On renvoie à 2.1 pour plus de précision. De même, $\tilde{H}$ s'identifie à $\mathrm{Isom}(W, W^*)$. Fixons une forme quadratique non dégénérée $\tilde{\zeta}$ sur Z. On suppose qu'elle est somme orthogonale d'une forme hyperbolique et de la forme $x \mapsto 2\nu x^2$ de dimension 1. On interprète $\tilde{\zeta}$ comme un élément de $\mathrm{Isom}(Z, Z^*)$. On plonge alors $\tilde{H}$ dans $\tilde{G}$: un élément $\tilde{y} \in \mathrm{Isom}(W, W^*)$ s'identifie à l'élément de $\mathrm{Isom}(V, V^*)$ qui envoie W sur W^*, Z sur Z^*, et dont les restrictions à W, resp. Z, coïncident avec $\tilde{y}$, resp. $\tilde{\zeta}$.

Tout élément $\tilde{x} \in \tilde{G}$ définit un automorphisme $\theta_{\tilde{x}}$ de G caractérisé par l'égalité $\tilde{x}g = \theta_{\tilde{x}}(g)\tilde{x}$. On définit la notion de sous-tore maximal de $\tilde{G}$ de la façon suivante. Soient T un sous-tore maximal de G défini sur F et B un sous-groupe de Borel de G, contenant T mais pas forcément défini sur F. Notons $\tilde{T}$ le sous-ensemble des éléments $\tilde{x} \in \tilde{G}$ tels que $\theta_{\tilde{x}}$ conserve T et B. C'est un espace principal homogène pour chacune des actions de T à droite ou à gauche. Pour $\tilde{x} \in \tilde{T}$, la restriction à T de $\theta_{\tilde{x}}$ ne dépend pas de $\tilde{x}$. On note cet automorphisme $\theta_{\tilde{T}}$. Nous dirons que $\tilde{T}$ est un sous-tore maximal de $\tilde{G}$ si $\tilde{T}(F)$ n'est pas vide.

Considérons une décomposition $W = W' \oplus W''$. Posons $H' = GL(W')$, $\tilde{H}' = \mathrm{Isom}(W', W'^*)$. Soit $\tilde{T}'$ un sous-tore maximal de $\tilde{H}'$, auquel est associé un sous-tore maximal T' de H', et soit $\tilde{\zeta}_{H,T} \in \mathrm{Isom}(W'', W''^*)$ une forme quadratique. On impose les conditions suivantes :

- la dimension de W' est paire ;
- $\tilde{T}'$ est anisotrope, c'est-à-dire que le seul sous-tore déployé contenu dans le sous-ensemble des éléments de T' fixes par $\theta_{\tilde{T}'}$ est égal à $\{1\}$;
- le groupe spécial orthogonal de la forme $\tilde{\zeta}_{H,T}$ sur W'' est quasi-déployé ainsi que celui de la forme $\tilde{\zeta}_{G,T} = \tilde{\zeta}_{H,T} \oplus \tilde{\zeta}$ sur $W'' \oplus Z$.

On note $\tilde{T}$ l'ensemble des éléments $\tilde{y} \in \tilde{H}$ tels que $\tilde{y}(W') = W'^*$, $\tilde{y}(W'') = W''^*$, que la restriction de $\tilde{y}$ à W' appartienne à $\tilde{T}'$ et que la restriction de $\tilde{y}$ à W'' coïncide avec $\tilde{\zeta}_{H,T}$. On note $\underline{\mathcal{T}}$ l'ensemble des sous-ensembles $\tilde{T}$ de $\tilde{H}$ obtenus de cette façon. Le groupe $H(F)$ agit par conjugaison sur $\tilde{H}$. Cette action conserve l'ensemble $\underline{\mathcal{T}}$. On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{T}$ de l'ensemble des orbites.

Soit $\tilde{T} \in \underline{\mathcal{T}}$, reprenons pour cet élément les objets définis ci-dessus, en notant simplement $T = T'$. L'action de $T(F)$ par conjugaison conserve $\tilde{T}(F)$. On note $\tilde{T}(F)_{/\theta}$ l'ensemble des orbites. C'est une variété analytique sur F sur laquelle on définit une certaine mesure. On définit aussi sur cette variété deux fonctions $\Delta^{\tilde{H}}$ et Δ_r, des valeurs absolues de certains déterminants. On définit également un groupe de Weyl $W(H, \tilde{T})$. Tous ces termes sont élémentaires, on renvoie à 1.4 et 3.2 pour des définitions précises. Ce qui est plus crucial est d'associer à $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\rho}$ deux fonctions $c_{\tilde{\pi}}$ et $c_{\tilde{\rho}}$ sur $\tilde{T}(F)_{/\theta}$. Soit $\tilde{t}$ un élément de $\tilde{T}(F)$ en position générale, notons $G_{\tilde{t}}$ la composante neutre du sous-groupe des points fixes par $\theta_{\tilde{t}}$ dans G. Ce groupe se décompose en $T_\theta \times SO(\tilde{\zeta}_{G,T})$, où $T_\theta = T \cap G_{\tilde{t}}$ et $SO(\tilde{\zeta}_{G,T})$ est le groupe spécial orthogonal de la forme quadratique $\tilde{\zeta}_{G,T}$ introduite ci-dessus. A $\tilde{\pi}$ est associé un caractère $\Theta_{\tilde{\pi}}$ qui est une fonction localement intégrable sur $\tilde{G}(F)$. Plus précisément, d'après un résultat d'Harish-Chandra généralisé au cas non connexe par Clozel, ce caractère admet au voisinage de $\tilde{t}$ un développement en combinaison linéaire de transformées de Fourier d'intégrales orbitales nilpotentes. C'est-à-dire, notons $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}$ l'algèbre de Lie de $G_{\tilde{t}}$ et $\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{t}})$ l'ensemble des orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)$. Il existe un voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)$ et, pour tout $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{t}})$, il existe un nombre complexe $c_{\tilde{\pi},\mathcal{O}}(\tilde{t})$ de sorte que, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F))$ à support dans ω, on ait l'égalité

$$\int_{\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)} \Theta_{\tilde{\pi}}(\tilde{t}\exp(X))\varphi(X)dX = \sum_{\mathcal{O}\in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{t}})} c_{\tilde{\pi},\mathcal{O}}(\tilde{t}) \int_{\mathcal{O}} \hat{\varphi}(X)dX,$$

où $\hat{\varphi}$ est la transformée de Fourier de φ. Evidemment, pour que cette formule ait un sens, on doit définir précisément la transformation de Fourier ainsi que les diverses mesures. Remarquons que les orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)$ sont les mêmes que celles dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(\tilde{\zeta}_{G,T})(F)$. Supposons d'abord d impair. Alors, parce que $\dim(W')$ est paire, l'espace $W''\oplus Z$ de la forme $\tilde{\zeta}_{G,T}$ est de dimension impaire. Puisque cette forme est quasi-déployée, il y a une unique orbite nilpotente régulière dans $\mathfrak{so}(\tilde{\zeta}_{G,T})(F)$. On la note $\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}$ et on pose $c_{\tilde{\pi}}(\tilde{t}) = c_{\tilde{\pi},\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}}(\tilde{t})$. Supposons maintenant d pair. Alors $\mathfrak{so}(\tilde{\zeta}_{G,T})(F)$ possède en général plusieurs orbites nilpotentes régulières. Mais on peut en sélectionner une de la façon suivante. On peut décomposer l'espace $W''\oplus Z$ muni de sa forme $\tilde{\zeta}_{G,T}$ en somme orthogonale d'un hyperplan X et d'une droite D_0 sur laquelle la forme quadratique est équivalente à $x \mapsto 2\nu x^2$. Nos hypothèses impliquent que le groupe spécial orthogonal $SO(X)$ est quasi-déployé. Puisque $\dim(X)$ est impaire, $\mathfrak{so}(X)(F)$ possède une unique orbite nilpotente régulière. Fixons un point de cette orbite et notons $\mathcal{O}_\nu$ l'orbite dans $\mathfrak{so}(\tilde{\zeta}_{G,T})(F)$ qui contient ce point. C'est encore une orbite nilpotente régulière. On pose $c_{\tilde{\pi}}(\tilde{t}) = c_{\tilde{\pi},\mathcal{O}_\nu}(\tilde{t})$. On a ainsi défini une fonction $c_{\tilde{\pi}}$ presque partout sur $\tilde{T}(F)$. Cette fonction est invariante par conjugaison par $T(F)$ et peut être considérée comme une fonction sur $\tilde{T}(F)_{/\theta}$. Par une construction similaire, on définit une fonction $c_{\tilde{\rho}}$ presque partout sur le même ensemble.

Posons

$$\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\pi},\tilde{\rho}) = \sum_{\tilde{T}\in\mathcal{T}} |W(H,\tilde{T})|^{-1} \int_{\tilde{T}(F)_{/\theta}} c_{\tilde{\pi}}(\tilde{t})c_{\tilde{\rho}}(\tilde{t})D^{\tilde{H}}(\tilde{t})\Delta_r(\tilde{t})d\tilde{t}.$$

Cette expression est absolument convergente. Notre résultat principal est le théorème 7.1 dont voici l'énoncé.

Théorème 0.1. — *Soit π, resp. ρ, une représentation admissible, irréductible, tempérée et autoduale de $G(F)$, resp. $H(F)$. Alors on a l'égalité*

$$\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\pi},\tilde{\rho}) = \varepsilon_\nu(\tilde{\pi},\tilde{\rho}).$$

Comme nous l'avons expliqué, notre motivation est la conjecture locale de Gross-Prasad. Nous ignorons si cette façon, plutôt compliquée, de calculer un facteur ε peut avoir d'autres applications.

La démonstration reprend celle de **[12]** et **[14]**. Donnons de très brèves indications dans le cas où $r = 0$ et $d = m + 1$ (en fait, ce cas ne peut pas être traité à part car la preuve utilise une récurrence compliquée sur le couple (d, m)). Considérons une fonction $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ qui est très cuspidale, cf. 1.7. On définit une suite $(\Omega_N)_{N\geq 1}$ de sous-ensembles ouverts compacts de $H(F)\backslash G(F)$ vérifiant les propriétés usuelles

$$\Omega_N \subset \Omega_{N+1} \text{ pour tout N et } \bigcup_N \Omega_N = H(F)\backslash G(F).$$

On note κ_N la fonction caractéristique de l'image réciproque de Ω_N dans $G(F)$. Cela étant, on pose

$$J_N(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = \int_{G(F)} \int_{\tilde{H}(F)} \Theta_{\tilde{\rho}}(\tilde{y}) \tilde{f}(g^{-1}\tilde{y}g) d\tilde{y} \kappa_N(g) dg.$$

Cette intégrale est absolument convergente. Comme pour la formule des traces locale d'Arthur, il y a deux façons de calculer la limite de cette expression quand N tend vers l'infini. L'une, que l'on peut qualifier de « géométrique », et qui est la réplique de celle de [**12**] ; l'autre, que l'on peut qualifier de « spectrale », qui s'appuie sur la formule de Plancherel pour le groupe $G(F)$ et qui est la réplique de celle de [**14**]. Ces deux voies conduisent à une égalité

$$J_{\text{géom}}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = \lim_{N \to \infty} J_N(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = J_{\text{spec}}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}).$$

Les deux expressions extrêmes contiennent des distributions (en $\tilde{f}$) qui ne sont pas invariantes : des intégrales orbitales pondérées et des caractères pondérés. Le procédé habituel d'Arthur permet par récurrence d'en déduire d'autres expressions qui ne contiennent plus que des distributions invariantes, et qui continuent d'être égales entre elles. Supposons que $\tilde{\pi}$ est « elliptique », le cas général s'en déduisant assez facilement. On prend pour $\tilde{f}$ un pseudo-coefficient de $\tilde{\pi}$. Alors les deux expressions « invariantes » ci-dessus deviennent respectivement $\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\pi}, \tilde{\rho})$ et $\varepsilon_{\nu}(\tilde{\pi}, \tilde{\rho})$, ce qui prouve l'égalité de ces deux termes.

Expliquons pourquoi apparaît le terme $\varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi)$. Notons E_π et E_ρ des espaces dans lesquels se réalisent π et ρ. Considérons l'espace $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \rho)$ des applications linéaires $\varphi : E_\pi \to E_\rho$ telles que $\varphi \circ \pi(h) = \rho(h) \circ \varphi$ pour tout $h \in H(F)$. D'après [**1**], cet espace est de dimension 1. Pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \rho)$ et $\tilde{y} \in \tilde{H}(F)$, l'application linéaire $\tilde{\rho}(\tilde{y})^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\pi}(\tilde{y})$ appartient encore à $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \rho)$ et ne dépend pas de $\tilde{y}$. Il existe donc un nombre $c \in \mathbb{C}^\times$ tel que

$$\tilde{\rho}(\tilde{y})^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\pi}(\tilde{y}) = c\varphi$$

pour tous $\varphi \in \mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \rho)$ et $\tilde{y} \in \tilde{H}(F)$. C'est ce nombre c qui apparaît naturellement dans nos calculs spectraux. Or le théorème 2.7 de [**7**] permet de calculer c : à des termes élémentaires près, c'est $\varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi)$.

Voici le contenu de l'article. La première section rassemble des définitions et résultats généraux sur les « groupes tordus », selon la terminologie de Labesse. La deuxième introduit plus précisément les groupes GL_d tordus. La partie « géométrique » de notre formule intégrale est traitée dans la section 3. La section 4 contient les majorations nécessaires pour prouver les diverses convergences d'intégrales utilisées dans la section 6. La section 5 établit le résultat évoqué ci-dessus, à savoir que $\varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi)$ mesure la compatibilité des deux prolongements $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\rho}$. La partie « spectrale » de la formule intégrale est traitée dans la section 6. Le théorème principal est prouvé dans la septième et dernière section. Ainsi qu'on l'a déjà dit, nos preuves sont parallèles à celles de [**12**] et [**14**], au point d'être parfois identiques. Pour épargner le lecteur, ou par paresse, on s'est souvent contenté d'indiquer sommairement les modifications à apporter ou même simplement d'affirmer les résultats sans démonstration.

Remarque sur la notation. — Dans les articles [**12**] et [**14**], on avait utilisé la lettre θ pour noter les caractères ou quasi-caractères (θ_π, θ_f etc.). Ici, cette lettre sera réservée aux automorphismes des groupes linéaires. Les caractères ou quasi-caractères seront notés par la lettre Θ.

Je remercie R. Beuzart pour m'avoir signalé une erreur dans une première version de ce texte.

1. Notations, groupes tordus

1.1. Notations générales. — Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On note $|.|_F$ la valeur absolue usuelle de F, val_F la valuation, $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers et $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal. On fixe une clôture algébrique $\bar{F}$ de F et une uniformisante ϖ_F de F.

Toutes les variétés algébriques seront supposées définies sur F, sauf mention explicite du contraire. De même pour les actions d'un groupe algébrique sur une variété. Soit G un groupe algébrique réductif connexe. On note A_G le plus grand tore déployé central dans G, $X(G)$ le groupe des caractères de G définis sur F, $\mathcal{A}_G = \mathrm{Hom}(X(G), \mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_G^* = X(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ le dual de $\mathcal{A}_G$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (g, X) & \mapsto & gXg^{-1} \end{array}$$

l'action adjointe.

Quand on définit un objet relatif au groupe G, on peut préciser si besoin est la notation en introduisant la lettre G en exposant. Par exemple, les intégrales orbitales pondérées sont notées $J_M(x, f)$ s'il n'y a pas d'ambigüité sur le groupe ambiant G, ou $J_M^G(x, f)$ si cela semble préférable.

Pour toute bijection θ d'un ensemble X dans lui-même, on note X^θ le sous-ensemble des points fixes.

1.2. Groupes tordus. — On appelle groupe tordu un couple $(G, \tilde{G})$ vérifiant les conditions qui suivent. Le terme G est un groupe réductif connexe. Le terme $\tilde{G}$ est une variété algébrique telle que $\tilde{G}(F) \neq \varnothing$. Il y a deux actions de groupe algébrique de G sur $\tilde{G}$, à droite et à gauche, notées

$$\begin{array}{ccccccc} G \times \tilde{G} & \to & \tilde{G} & \qquad & \tilde{G} \times G & \to & \tilde{G} \\ (g, \tilde{x}) & \mapsto & g\tilde{x} & \qquad & (\tilde{x}, g) & \mapsto & \tilde{x}g. \end{array}$$

Chacune d'elles fait de $\tilde{G}$ un espace principal homogène sur G.

Considérons un tel groupe tordu. Notons $Aut(G)$ le groupe des automorphismes de G. Il existe une unique application algébrique

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \to & Aut(G) \\ \tilde{x} & \mapsto & \theta_{\tilde{x}} \end{array}$$

de sorte que l'on ait l'égalité $\tilde{x}g = \theta_{\tilde{x}}(g)\tilde{x}$ pour tous $\tilde{x} \in \tilde{G}$ et $g \in G$. De $\theta_{\tilde{x}}$ se déduit des automorphismes de $X(G)$, de A_G, de $\mathcal{A}_G$ etc. qui ne dépendent pas de $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$. On les note $\theta_{\tilde{G}}$. On suppose

Hypothèse. — $\theta_{\tilde{G}}$ est d'ordre fini.

Le groupe G opère sur $\tilde{G}$ par conjugaison : $(g, \tilde{x}) \mapsto g\tilde{x}g^{-1}$. Pour tout sous-ensemble $\tilde{X}$ de $\tilde{G}$, on note $\mathrm{Norm}_G(\tilde{X})$ le normalisateur de $\tilde{X}$ dans G et $Z_G(\tilde{X})$ son centralisateur. Si $\tilde{X}$ est réduit à un point $\{\tilde{x}\}$, on note simplement ces groupes $Z_G(\tilde{x})$ et on note $G_{\tilde{x}}$ la composante neutre de $Z_G(\tilde{x})$. La variété $\tilde{G}$ opère sur G par $(\tilde{x}, g) \mapsto \theta_{\tilde{x}}(g)$. Si X est un sous-ensemble de G, on définit alors son normalisateur $N_{\tilde{G}}(X)$ et son centralisateur $Z_{\tilde{G}}(X)$, avec la variante $Z_{\tilde{G}}(x)$ quand X est réduit à un point $\{x\}$.

On note $A_{\tilde{G}}$ le plus grand sous-tore de A_G sur lequel $\theta_{\tilde{G}}$ agit trivialement. On note $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$, resp. $\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$, le sous-groupe des éléments de $\mathcal{A}_G$, resp. $\mathcal{A}^*_G$ fixés par $\theta_{\tilde{G}}$. On note $a_{\tilde{G}}$ la dimension de $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. On définit un homomorphisme $H_{\tilde{G}} : G(F) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ par $H_{\tilde{G}}(g)(\chi) = \log(|\chi(g)|_F)$ pour tous $g \in G(F)$ et $\chi \in X(G)^{\theta_{\tilde{G}}}$.

On note $\tilde{G}_{ss}$ le sous-ensemble des éléments semi-simples de $\tilde{G}$, c'est-à-dire des $\tilde{x} \in \tilde{G}$ tels qu'il existe un sous-tore maximal T de G, défini sur $\bar{F}$, et un sous-groupe de Borel B de G, défini sur $\bar{F}$ et contenant T, tels que $\theta_{\tilde{x}}$ conserve T et B. Si $\tilde{x} \in \tilde{G}_{ss}(F)$, on pose

$$D^{\tilde{G}}(\tilde{x}) = |\det(1 - \theta_{\tilde{x}})_{|\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\tilde{x}}}|_F.$$

On note $\tilde{G}_{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des éléments fortement réguliers de $\tilde{G}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $\tilde{x}$ tels que $Z_G(\tilde{x})$ soit abélien et $G_{\tilde{x}}$ soit un tore.

On appelle sous-groupe parabolique tordu $(P, \tilde{P})$ un couple vérifiant les conditions suivantes. Le terme P est un sous-groupe parabolique de G. Le terme $\tilde{P}$ est son normalisateur dans $\tilde{G}$ et on suppose $\tilde{P}(F) \neq \emptyset$. Pour un tel couple, on appelle composante de Lévi tordue un couple $(M, \tilde{M})$ tel que M soit une composante de Lévi de P et $\tilde{M}$ est l'intersection des normalisateurs de P et M dans $\tilde{G}$. On appelle groupe de Lévi tordu de $(G, \tilde{G})$ un couple $(M, \tilde{M})$ tel qu'il existe un sous-groupe parabolique tordu $(P, \tilde{P})$ dont $(M, \tilde{M})$ est une composante de Lévi tordue. On vérifie qu'un groupe de Lévi tordu est un groupe tordu (c'est-à-dire que $\tilde{M}(F) \neq \emptyset$, cf. **[11]** 1.6). Pour un tel groupe de Lévi tordu, on note $\mathcal{P}(\tilde{M})$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques tordus $(P, \tilde{P})$ de composante de Lévi tordue $(M, \tilde{M})$, $\mathcal{F}(\tilde{M})$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques tordus $(Q, \tilde{Q})$ tels que $M \subset Q$ et $\tilde{M} \subset \tilde{Q}$ et $\mathcal{L}(\tilde{M})$ l'ensemble des groupes de Lévi tordus $(L, \tilde{L})$ tels que $M \subset L$ et $\tilde{M} \subset \tilde{L}$. Soit $(Q, \tilde{Q})$ un sous-groupe parabolique tordu. On écrit simplement $\tilde{Q} = \tilde{L}U$ pour signifier que :

- $\tilde{L}$ est le second membre d'une composante de Lévi tordue $(L, \tilde{L})$ de $(Q, \tilde{Q})$;
- U est le radical unipotent de Q.

Si $(M, \tilde{M})$ est un groupe de Lévi fixé et que $(Q, \tilde{Q})$ appartient à $\mathcal{F}(\tilde{M})$, il sera de plus supposé que $\tilde{L}$ contient $\tilde{M}$.

Comme dans le cas non tordu, les Lévi tordus se caractérisent comme les commutants de tores déployés. Précisément, soit A un sous-tore déployé de G, notons M son commutant dans G et $Z_{\tilde{G}}(A)$ son commutant dans $\tilde{G}$. Supposons $Z_{\tilde{G}}(A)(F) \neq \varnothing$. Alors $(M, Z_{\tilde{G}}(A))$ est un Lévi tordu. Prouvons cela. On sait bien que M est un Lévi de G. Choisissons un élément $x_* \in X_*(A)$ en position générale et posons $a = x_*(\varpi_F)$. Alors M est le commutant de a. Notons P le sous-groupe parabolique de G, de composante de Lévi M, dont le radical unipotent est engendré par les sous-groupes radiciels associés aux racines α de A_M telles que $|\alpha(a)|_F > 1$. Soit $\tilde{x} \in Z_{\tilde{G}}(A)$. Puisque $\theta_{\tilde{x}}$ fixe a, il conserve aussi M et P. Donc $\tilde{x}$ appartient à l'ensemble $\tilde{M}$ défini comme plus haut, et $Z_{\tilde{G}}(A) \subset \tilde{M}$. Puisque $Z_{\tilde{G}}(A)(F)$ n'est pas vide, $\tilde{M}(F)$ ne l'est pas non plus, ce qui est la condition pour que $(M, \tilde{M})$ soit un groupe de Lévi tordu. De plus, $Z_{\tilde{G}}(A)$ et $\tilde{M}$ sont évidemment tous deux des espaces principaux homogènes pour le groupe M. Ils sont donc égaux, ce qui prouve l'assertion. Inversement, tout groupe de Lévi tordu $(M, \tilde{M})$ est le commutant au sens ci-dessus du tore $A_{\tilde{M}}$.

Soit $P_{\min}$ un sous-groupe parabolique minimal de G et $M_{\min}$ une composante de Lévi de $P_{\min}$. On peut compléter ces données, de façon unique, en un sous-groupe parabolique tordu $(P_{\min}, \tilde{P}_{\min})$ et une composante de Lévi tordue $(M_{\min}, \tilde{M}_{\min})$. En effet, $\tilde{P}_{\min}$ est le normalisateur de $P_{\min}$ dans $\tilde{G}$ et $\tilde{M}_{\min}$ est le normalisateur de $M_{\min}$ dans $\tilde{P}_{\min}$. On doit voir que $\tilde{M}_{\min}(F) \neq \varnothing$. Soit $\tilde{y} \in \tilde{G}(F)$. Alors le couple $(\theta_{\tilde{y}}(P_{\min}), \theta_{\tilde{y}}(M_{\min}))$ est formé d'un sous-groupe parabolique minimal de G et d'une composante de Lévi de ce sous-groupe. Deux tels couples sont conjugués par un élément de $G(F)$. Choisissons donc $g \in G(F)$ tel que la conjugaison par g envoie $(\theta_{\tilde{y}}(P_{\min}), \theta_{\tilde{y}}(M_{\min}))$ sur $(P_{\min}, M_{\min})$. Posons $\tilde{x} = g\tilde{y}$. Alors $\tilde{x}$ appartient à $\tilde{M}_{\min}(F)$.

On appelle sous-tore maximal tordu un couple $(T, \tilde{T})$ vérifiant les conditions suivantes. Le terme T est un sous-tore maximal de G. Le terme $\tilde{T}$ est une sous-variété de $\tilde{G}$. L'ensemble $\tilde{T}(F)$ n'est pas vide et il existe un sous-groupe de Borel B de G, défini sur $\bar{F}$, contenant T, tel que $\tilde{T}$ soit l'intersection des normalisateurs de T et B dans $\tilde{G}$. Cela entraîne que l'on a $\tilde{T} = T\tilde{x} = \tilde{x}T$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{T}$. La restriction à T de l'automorphisme $\theta_{\tilde{x}}$ ne dépend pas de $\tilde{x}$, on la note $\theta_{\tilde{T}}$ ou simplement θ si cela ne crée pas d'ambigüité. On note T_θ la composante neutre du sous-groupe des points fixes T^θ.

Evidemment, pour un couple $(G, \tilde{G})$, ou $(P, \tilde{P})$ etc. le premier terme G ou P etc. est uniquement déterminé par le second $\tilde{G}$ ou $\tilde{P}$ etc. Dans la suite de l'article, on parlera simplement du groupe tordu $\tilde{G}$, ou du sous-groupe parabolique tordu $\tilde{P}$ etc. Les termes G ou P etc. seront utilisés si besoin est sans les définir explicitement. D'autre part, on peut utiliser les définitions que l'on vient d'introduire dans le cas où $\tilde{G} = G$ muni des multiplications à droite et à gauche. On supprime alors les $\tilde{}$; par exemple, on définit les ensembles $\mathcal{P}(M)$, $\mathcal{L}(M)$, la fonction H_P etc.

Remarque. — Les espaces tordus ont été introduits par Labesse. D'autres auteurs préfèrent étudier les groupes non connexes. Un espace tordu $(G,\tilde{G})$ apparaît comme une composante d'un tel groupe. En effet, fixons $\tilde{x}\in\tilde{G}(F)$. D'après l'hypothèse de finitude faite plus haut, on peut choisir un entier $n\geq 1$ tel que l'image de $\theta_{\tilde{x}}^n$ dans le groupe des automorphismes extérieurs de G soit égale à 1. Donc $\theta_{\tilde{x}}^n$ est l'automorphisme intérieur associé à un élément du groupe adjoint $G_{ad}(F)$. L'image de $G(F)$ dans $G_{ad}(F)$ est d'indice fini. Quitte à accroître n, on peut donc supposer que $\theta_{\tilde{x}}^n$ est l'automorphisme intérieur associé à un élément $x\in G(F)$. Fixons un tel x. Considérons le groupe abélien libre $\tilde{X}$ engendré par $\tilde{x}$. Il agit sur G : $\tilde{x}^m$ agit par $\theta_{\tilde{x}}^m$. Considérons le produit semi-direct $G\rtimes\tilde{X}$, puis le plus petit sous-groupe distingué de ce produit contenant $x^{-1}\tilde{x}^n$. Notons G^+ le quotient. Alors G^+ est un groupe linéaire algébrique de composante neutre G et $\tilde{G}$ s'identifie à la composante connexe de G^+ qui contient $\tilde{x}$. Cette remarque permet d'appliquer les résultats démontrés dans la littérature pour des groupes non connexes.

1.3. Les espaces $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. — Soit $\tilde{G}$ un groupe tordu. Fixons un Lévi minimal $M_{\min}$ de G. On note $\mathcal{L}^{\tilde{G}}$ l'ensemble des Lévis tordus $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ tels que $M_{\min}\subset M$. On définit le groupe de Weyl usuel $W^G=\mathrm{Norm}_{G(F)}(M_{\min})/M_{\min}$.

On munit $\mathcal{A}_{M_{\min}}$ d'un produit scalaire invariant par l'action du groupe de Weyl W^G. Pour tout Lévi tordu $\tilde{M}$, on en déduit par conjugaison et restriction un produit scalaire sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Si $\tilde{L}$ est un Lévi tordu tel que $\tilde{M}\subset\tilde{L}$, on note $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}$ l'orthogonal de $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. On note $\zeta\mapsto\zeta_{\tilde{L}}$ et $\zeta\mapsto\zeta^{\tilde{L}}$ les projections orthogonales de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$, resp. sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}$. Fixons un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à $M_{\min}$ et supposons $M_{\min}\subset M$. Soit $\tilde{P}=\tilde{M}U\in\mathcal{P}(\tilde{M})$. On définit une fonction $H_{\tilde{P}}:G(F)\to\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ par $H_{\tilde{P}}(g)=H_{\tilde{M}}(m)$ pour $g=muk$, avec $m\in M(F)$, $u\in U(F)$ et $k\in K$.

On fixe une extension de $H_{\tilde{G}}$ à $\tilde{G}(F)$, c'est-à-dire une fonction que l'on note encore $H_{\tilde{G}}:\tilde{G}(F)\to\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ telle que $H_{\tilde{G}}(g\tilde{x}g')=H_{\tilde{G}}(g)+H_{\tilde{G}}(\tilde{x})+H_{\tilde{G}}(g')$ pour tous $g,g'\in G(F)$ et $\tilde{x}\in\tilde{G}(F)$. Pour tout Lévi tordu $\tilde{M}$, on en déduit une fonction analogue $H_{\tilde{M}}$: $\tilde{M}(F)\to\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ de la façon suivante. Posons $W^{\tilde{M}}=\mathrm{Norm}_{G(F)}(\tilde{M})/M(F)$. Fixons, ainsi qu'il est loisible, une extension $H'_{\tilde{M}}$ de $H_{\tilde{M}}$ à $\tilde{M}(F)$ de sorte que la composée de cette fonction et de la projection orthogonale de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ coïncide avec la restriction de $H_{\tilde{G}}$ à $\tilde{M}(F)$. Pour $g\in\mathrm{Norm}_{G(F)}(\tilde{M})$ et $\tilde{x}\in\tilde{M}(F)$, le terme $H'_{\tilde{M}}(g\tilde{x}g^{-1})$ ne dépend que de l'image w de g dans $W^{\tilde{M}}$. Notons-le $H'_{\tilde{M}}(w\tilde{x}w^{-1})$. D'autre part, le groupe $W^{\tilde{M}}$ agit naturellement dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. On pose

$$H_{\tilde{M}}(\tilde{x})=|W^{\tilde{M}}|^{-1}\sum_{w\in W^{\tilde{M}}}w^{-1}H'_{\tilde{M}}(w\tilde{x}w^{-1}).$$

L'application $H_{\tilde{M}}$ ainsi définie sur $\tilde{M}(F)$ est un prolongement de l'application notée de la même façon sur $M(F)$. Elle ne dépend pas de l'application auxiliaire $H'_{\tilde{M}}$. Si $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})$, la restriction de $H_{\tilde{L}}$ à $\tilde{M}(F)$ coïncide avec la composée de $H_{\tilde{M}}$ et de la projection orthogonale de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$. Pour $g \in G(F)$, la conjugaison par g définit un isomorphisme de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ sur $\mathcal{A}_{g\tilde{M}g^{-1}}$ et on a l'égalité $H_{g\tilde{M}g^{-1}}(g\tilde{x}g^{-1}) = gH_{\tilde{M}}(\tilde{x})g^{-1}$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{M}(F)$.

1.4. Mesures. — Soient G un groupe réductif connexe, $M_{\min}$ un groupe de Lévi minimal de G et K un sous-groupe compact spécial de $G(F)$ en bonne position relativement à $M_{\min}$. Fixons une mesure de Haar sur $G(F)$ et munissons K de la mesure de masse totale 1 (remarquons que l'on ne suppose pas que cette mesure sur K soit égale à la restriction de la mesure sur $G(F)$). Alors, pour tout $P = MU \in \mathcal{F}(M_{\min})$, Arthur a défini une mesure de Haar sur les groupes $M(F)$ et $U(F)$, cf. [**4**] paragraphe 1. Soit T un tore. Si T est déployé, on munit $T(F)$ de la mesure telle que le plus grand sous-groupe compact de $T(F)$ soit de mesure 1. En général, on munit $A_T(F)$ de cette mesure puis $T(F)$ de celle pour laquelle la mesure quotient sur $T(F)/A_T(F)$ soit de masse totale 1.

Fixons un caractère continu non trivial ψ de F. On munit F de la mesure autoduale pour ψ. Fixons une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $< .,. >$ sur $\mathfrak{g}(F)\times\mathfrak{g}(F)$, invariante par l'action adjointe de $G(F)$. Pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que la restriction de $< .,. >$ à $\mathfrak{h}(F)$ soit non dégénérée, on munit $\mathfrak{h}(F)$ de la mesure de Haar autoduale pour le bicaractère $(X,Y) \mapsto \psi(< X,Y >)$. Soit H un sous-groupe de G, supposons que l'on a muni $H(F)$ d'une mesure de Haar dh et que la restriction de $< .,. >$ soit non dégénérée. La mesure sur $\mathfrak{h}(F)$ se relève par l'exponentielle en une mesure de Haar $d'h$ sur $H(F)$ qui n'a aucune raison d'être celle que l'on a fixée. On note $\nu(H)$ la constante telle $dh = \nu(H)d'h$ (en fait, nous n'utiliserons cette notation que dans le cas où H est un sous-tore de G).

Supposons que G soit la première composante d'un groupe tordu $(G,\tilde{G})$. La mesure sur $G(F)$ en détermine une sur l'espace principal homogène $\tilde{G}(F)$. Considérons un sous-tore maximal tordu $(T,\tilde{T})$. Le groupe $T(F)$ agit par conjugaison sur $\tilde{T}(F)$. Notons $\tilde{T}(F)_{/\theta}$ l'ensemble des orbites. Il est naturellement muni d'une structure de groupe de Lie sur F et d'une action de $T(F)$ par multiplication à gauche. Pour tout $\tilde{t} \in \tilde{T}(F)_{/\theta}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} T_\theta(F) & \to & \tilde{T}(F)_{/\theta} \\ t & \mapsto & t\tilde{t} \end{array}$$

est un isomorphisme local. Il existe une mesure sur $\tilde{T}(F)_{/\theta}$, invariante par l'action de $T(F)$ et indépendante du choix de $\tilde{t}$, telle que cette application conserve localement les mesures. On munit $\tilde{T}(F)_{/\theta}$ de cette mesure. On pose

$$W(G,\tilde{T}) = \mathrm{Norm}_{G(F)}(\tilde{T})/T(F).$$

On dit que $\tilde{T}$ est elliptique dans $\tilde{G}$ si $A_{\tilde{T}} = A_{\tilde{G}}$. Fixons un ensemble $\mathcal{T}(\tilde{G})$, resp. $\mathcal{T}_{ell}(\tilde{G})$, de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans l'ensemble des sous-tores maximaux tordus, resp. et elliptiques, de $\tilde{G}$. On fixe des ensembles analogues pour tout Lévi tordu. La formule de Weyl prend l'une ou l'autre des formes