444

ASTÉRISQUE

2023

# PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS ON A ROUGH BACKGROUND

# IV

# CONTROL OF THE ERROR TERM

Jérémie SZEFTEL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 444, 2023



**_Diffusion_**

| | |
|---|---|
| Maison de la SMF | AMS |
| Case 916 - Luminy | P.O. Box 6248 |
| 13288 Marseille Cedex 9 | Providence RI 02940 |
| France | USA |
| commandes@smf.emath.fr | http://www.ams.org |

**_Tarifs_**

*Vente au numéro:* 60 € ($ 90)

*Abonnement* Europe: 665 €, hors Europe : 718 € ($ 1 077)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

**_Secrétariat_**

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • http://smf.emath.fr/



ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN 978-2-85629-978-4
10.24033/ast.1203

Directeur de la publication : Fabien Durand

444

ASTÉRISQUE

2023

# PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS ON A ROUGH BACKGROUND

# IV

# CONTROL OF THE ERROR TERM

Jérémie SZEFTEL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

*Jérémie Szeftel*
CNRS & Laboratoire Jacques-Louis Lions
Sorbonne Université
75005 Paris, France
`jeremie.szeftel@sorbonne-universite.fr`

Texte soumis en avril 2012 et accepté en avril 2023.

***Mathematical Subject Classification* (2010). —** 83C05, 35S30, 58J40.
***Keywords*. —** Einstein equations, wave equation, parametrix, Fourier integral operator, rough solutions.
***Mots-clefs*. —** Équations d'Einstein, équation des ondes, paramétrix, opérateur intégral de Fourier, solutions peu régulières.

# PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS ON A ROUGH BACKGROUND

# IV

# CONTROL OF THE ERROR TERM

by Jérémie SZEFTEL

***Abstract.*** — This book is dedicated to the construction and the control of a parametrix to the homogeneous wave equation $\square_{\mathbf{g}}\phi = 0$, where $\mathbf{g}$ is a rough metric satisfying the Einstein vacuum equations. Controlling such a parametrix as well as its error term when one only assumes $L^2$ bounds on the curvature tensor $\mathbf{R}$ of $\mathbf{g}$ is a major step of the proof of the bounded $L^2$ curvature conjecture proposed in [**6**], and solved jointly with S. Klainerman and I. Rodnianski in [**11**]. On a more general level, this book deals with the control of the eikonal equation on a rough background, and with the derivation of $L^2$ bounds for Fourier integral operators on manifolds with rough phases and symbols, and as such is also of independent interest.

***Résumé.*** **(Parametrix pour l'équation des ondes sur un espace-temps peu régulier : IV. Contrôle du terme d'erreur)** —Cet ouvrage est dédié à la construction et au contrôle d'une paramétrix pour l'équation des ondes homogène $\square_{\mathbf{g}}\phi = 0$, où $\mathbf{g}$ est une métrique peu régulière satisfaisant les équations d'Einstein dans le vide. Le contrôle d'une telle paramétrix ainsi que du terme d'erreur associé lorsque l'on suppose seulement des bornes $L^2$ sur le tenseur de courbure $\mathbf{R}$ de $\mathbf{g}$ est une étape cruciale de la preuve de la conjecture de courbure $L^2$ proposée dans [**6**], et résolue conjointement avec S. Klainerman et I. Rodnianski dans [**11**]. Plus généralement, cet ouvrage concerne le contrôle de l'équation eikonale sur un espace-temps peu régulier et la dérivation de bornes $L^2$ pour des opérateurs intégraux de Fourier sur des variétés avec une phase et un symbole peu réguliers, et possède de ce point de vue un intérêt propre.

## CONTENTS