

444

ASTÉRISQUE

2023

PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS
ON A ROUGH BACKGROUND

IV

CONTROL OF THE ERROR TERM

Jérémie SZEFTTEL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 444, 2023

Comité de rédaction

Marie-Claude ARNAUD Alexandru OANCEA
Christophe BREUIL Nicolas RESSAYRE
Eleonore DI NEZZA Rémi RHODES
Colin GUILLARMOU Sylvia SERFATY
Alessandra IOZZI Sug WOO SHIN
Eric MOULINES
Nicolas BURQ (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF AMS
Case 916 - Luminy P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9 Providence RI 02940
France USA
commandes@smf.emath.fr <http://www.ams.org>

Tarifs

Vente au numéro: 60 € (\$ 90)
Abonnement Europe: 665 €, hors Europe : 718 € (\$ 1077)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2023

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN 978-2-85629-978-4
10.24033/ast.1203

Directeur de la publication : Fabien Durand

444

ASTÉRISQUE

2023

PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS
ON A ROUGH BACKGROUND

IV

CONTROL OF THE ERROR TERM

Jérémie SZEFTTEL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Jérémie Szeftel
CNRS & Laboratoire Jacques-Louis Lions
Sorbonne Université
75005 Paris, France
`jeremie.szeftel@sorbonne-universite.fr`

Texte soumis en avril 2012 et accepté en avril 2023.

Mathematical Subject Classification (2010). — 83C05, 35S30, 58J40.

Keywords. — Einstein equations, wave equation, parametrix, Fourier integral operator, rough solutions.

Mots-clefs. — Équations d'Einstein, équation des ondes, paramétrix, opérateur intégral de Fourier, solutions peu régulières.

PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS ON A ROUGH BACKGROUND

IV CONTROL OF THE ERROR TERM

by Jérémie SZEFTTEL

Abstract. — This book is dedicated to the construction and the control of a parametrix to the homogeneous wave equation $\square_{\mathbf{g}}\phi = 0$, where \mathbf{g} is a rough metric satisfying the Einstein vacuum equations. Controlling such a parametrix as well as its error term when one only assumes L^2 bounds on the curvature tensor \mathbf{R} of \mathbf{g} is a major step of the proof of the bounded L^2 curvature conjecture proposed in [6], and solved jointly with S. Klainerman and I. Rodnianski in [11]. On a more general level, this book deals with the control of the eikonal equation on a rough background, and with the derivation of L^2 bounds for Fourier integral operators on manifolds with rough phases and symbols, and as such is also of independent interest.

Résumé. (Parametrix pour l'équation des ondes sur un espace-temps peu régulier : IV. Contrôle du terme d'erreur) — Cet ouvrage est dédié à la construction et au contrôle d'une paramétrix pour l'équation des ondes homogène $\square_{\mathbf{g}}\phi = 0$, où \mathbf{g} est une métrique peu régulière satisfaisant les équations d'Einstein dans le vide. Le contrôle d'une telle paramétrix ainsi que du terme d'erreur associé lorsque l'on suppose seulement des bornes L^2 sur le tenseur de courbure \mathbf{R} de \mathbf{g} est une étape cruciale de la preuve de la conjecture de courbure L^2 proposée dans [6], et résolue conjointement avec S. Klainerman et I. Rodnianski dans [11]. Plus généralement, cet ouvrage concerne le contrôle de l'équation eikonale sur un espace-temps peu régulier et la dérivation de bornes L^2 pour des opérateurs intégraux de Fourier sur des variétés avec une phase et un symbole peu réguliers, et possède de ce point de vue un intérêt propre.

CONTENTS

1. Introduction	1
2. Main results	7
2.1. Maximal foliation on \mathcal{M}	7
2.2. Geometry of the foliation generated by u on \mathcal{M}	8
2.3. Commutation formulas	11
2.4. Regularity assumptions on the phase $u(t, x, \omega)$	11
2.5. Estimates on $P_{t,u}$ and \mathcal{M}	13
2.6. Geometric Littlewood-Paley projections on $P_{t,u}$	14
2.7. Commutator estimates	15
2.8. Dependence of the norm $L_u^\infty L^2(\mathcal{H}_u)$ on $\omega \in \mathbb{S}^2$	16
2.9. The boundedness of the error term	19
3. Proof of Theorem 2.15 (control of the error term)	21
3.1. The basic computation	21
3.2. Structure of the proof of Theorem 2.15	21
4. Proof of Proposition 3.1 (almost orthogonality in frequency)	25
4.1. A first integration by parts	26
4.2. Estimates for A_p^1 and A_p^2	28
4.3. A more precise estimate for A_0^1	30
4.4. A second integration by parts	32
4.5. End of the proof of Proposition 3.1	34
5. Proof of Proposition 3.3 (control of the diagonal term)	35
6. Proof of Proposition 3.2 (almost orthogonality in angle)	43
6.1. Presence of a log-loss	43
6.2. A physical space decomposition for $E_j^\nu f$	45
6.3. The mechanism to remove the log-loss	46
6.4. The main estimates	47
6.5. End of the proof of Proposition 3.2	50
7. The key estimates	55
7.1. Estimate of the $L^p(\mathcal{M})$ norm of oscillatory integrals	55
7.2. Estimates of the $L^1(\mathcal{C}\mathcal{M})$ norm of oscillatory integrals	56
7.3. Estimate of the $L_{u,x'}^2 L_t^\infty$ norm of oscillatory integrals	60
7.4. Integration by parts	89

8. Proof of Proposition 6.5	95
8.1. Proof of Proposition 8.5 (Control of $B_{j,\nu,\nu',l,m}^{1,1}$)	99
8.2. Proof of Proposition 8.4 (Control of $B_{j,\nu,\nu',l,m}^{1,2}$)	115
8.3. Proof of Proposition 8.2 (Control of $B_{j,\nu,\nu',l,m}^2$)	205
8.4. End of the proof of Proposition 8.2	234
9. Proof of Proposition 6.6	235
10. Proof of Proposition 6.7	245
10.1. Proof of Proposition 10.2 (Control of $A_{j,\nu,\nu',l,m}^1$)	251
10.2. Proof of Proposition 10.3 (Control of $A_{j,\nu,\nu',l,m}^2$)	261
A. Proof of Lemma 8.7	269
B. Proof of Lemma 8.8	273
C. Proof of Lemma 8.13	275
D. Proof of Lemma 8.14	281
E. Proof of Lemma 8.15	283
F. Proof of Lemma 8.16	287
G. Proof of Lemma 8.17	289
H. Proof of Lemma 8.18	293
I. Proof of Lemma 9.1	297
J. Proof of Lemma 10.1	301
K. Proof of Lemma 10.4	305
L. Proof of Lemma 10.5	309
Bibliography	313