FELIPE CANO
ROBERT MOUSSU
FERNANDO SANZ

Pinceaux de courbes intégrales d'un champ de vecteurs analytique

Astérisque, tome 297 (2004), p. 1-34
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__297__1_0>

Astérisque
297, 2004, p. 1–34

PINCEAUX DE COURBES INTÉGRALES D'UN CHAMP DE VECTEURS ANALYTIQUE

par

Felipe Cano, Robert Moussu & Fernando Sanz

Résumé. — Soit γ_0 une courbe intégrale d'un champ de vecteurs analytique X dans une variété réelle de dimension trois. Supposons que γ_0 ait un seul point limite et qu'elle possède des tangentes itérées. Le pinceau intégral $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ est l'ensemble des courbes intégrales de X qui ont les mêmes tangentes itérées (orientées) que γ_0. Nous montrons que les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont, soit deux à deux sous-analytiquement séparables, soit deux à deux asymptotiquement enlacées. Dans ce dernier cas, $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ possède un axe formel qui est divergent si et seulement si les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont non oscillantes.

Abstract **(Integral pencils of trajectories of an analytic vector field).** — Let γ_0 be an integral curve of an analytic vector field X in a real three dimensional manifold. Suppose that γ_0 has a single limit point and that it has all iterated tangents. The integral pencil $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ is the set of all integral curves of X having the same (oriented) iterated tangents as γ_0. We prove that two arbitrary curves in $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ are either subanalytically separated or asymptotically linked. In this last case, $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ has a formal axis which is divergent if and only if the curves of $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ are not oscillatory.

0. Introduction

Soit X un champ de vecteurs analytique sur une variété M de dimension trois et soit γ_0 une courbe intégrale de X dont l'ensemble ω-limite, $\omega(\gamma_0)$, est un point singulier p de X. Nous nous intéresserons à la question suivante. Comment, d'un point de vue analytique, γ_0 peut-elle tendre vers p? Cette question n'est pertinente que si γ_0 possède une tangente en p. En effet, soit $\pi_1 : M_1 \to M_0$ l'éclatement de centre p_0 et soit γ_1 le relevé de γ par π_1. Son ensemble ω-limite, $\omega(\gamma_1)$, est contenu dans le diviseur exceptionnel de π_1 qui est identifié à $\mathbb{RP}(2)$. La courbe γ_0 a une tangente en p_0 de direction p_1 si et seulement si $\omega(\gamma_1) = p_1$. Si ce n'est pas le cas, l'étude de γ_1 au voisinage de p_1 est un problème de dynamique globale. Ce n'est plus

Classification mathématique par sujets **(2000).** — Primary 34C08; Secondary 34C10, 37D30, 32B20, 32S50.
Mots clefs. — Champ de vecteurs, EDO, éclatement, oscillation, variété invariante.

un problème local de géométrie analytique. Pour cette raison nous nous intéressons seulement aux courbes γ_0 qui possèdent des *tangentes itérées* $\mathrm{TI}(\gamma_0) = \{p_n\}$, c'est-à-dire, à celles pour lesquelles il existe une suite infinie d'éclatements ponctuels

$$M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \cdots \longleftarrow M_{n-1} \xleftarrow{\pi_n} M_n \cdots$$

de centres les points $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, \ldots$, telle que $p_n = \omega(\gamma_n)$ où γ_n est le relevé de γ_{n-1} par π_n. La droite tangente à γ_{n-1} en p_{n-1} est naturellement orientée par γ_{n-1}. Nous notons p_n^+ le point correspondant de $\mathbb{S}^2$ et $\mathrm{TI}^+(\gamma_0) = \{p_n^+\}$ la suite des *tangentes itérées orientées* de γ_0. L'ensemble $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ des courbes γ telles que $\mathrm{TI}^+(\gamma) = \mathrm{TI}^+(\gamma_0)$ est le *pinceau intégral* de γ_0 pour X. Si $\widehat{\Gamma}$ est une courbe formelle en p_0, nous notons encore $\mathrm{TI}(\widehat{\Gamma})$ sa suite de points infiniment proches au sens de [**2**]. Si $\mathrm{TI}(\widehat{\Gamma}) = \mathrm{TI}(\gamma_0)$ nous dirons que $\widehat{\Gamma}$ est *l'axe de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ ou que γ_0 a un *contact plat* avec $\widehat{\Gamma}$.

S'il existe une surface analytique qui ne contient pas γ_0 et qui coupe γ_0 selon une infinité de points, on dit que γ_0 est *oscillante*. Dans ce cas, le théorème suivant décrit les propriétés du pinceau $\mathrm{PI}(\gamma_0)$.

***Théorème du spiralement axial* ([7]).** — *Si γ_0 est oscillante et possède des tangentes itérées,* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *possède un axe Γ convergent X-invariant et γ_0 « spirale » autour de Γ. De plus, si Γ n'est pas contenu dans* $\operatorname{Sing} X$ *le lieu singulier de X, toutes les courbes de* $\mathrm{PI}(\gamma_0) \setminus \Gamma$ *sont oscillantes et spiralent autour de Γ.*

Si la courbe γ_0 n'est pas oscillante, elle possède des tangentes itérées. Le but de ce travail est l'étude des pinceaux $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ constitués de courbes non oscillantes. Ces objets ne sont pas rares. D'après le théorème précédent, c'est le cas si γ_0 est non oscillante et n'a pas un contact plat avec $\operatorname{Sing} X$.

Théorème I. — *Si les courbes de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont non oscillantes on a l'une des propriétés suivantes :*

s) *Deux courbes distinctes, quelconques, de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont sous-analytiquement séparables.*

e) *Deux courbes distinctes, quelconques, de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont asymptotiquement enlacées.*

De plus, ces propriétés ne peuvent pas être satisfaites simultanément.

Dans le cas s) nous dirons que $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ est un *pinceau intégral séparé.* Dans le cas e) nous dirons que $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ est un *pinceau intégral enlacé.* La structure de tels pinceaux est décrite dans le théorème II ci-dessous. Avant de l'énoncer, définissons brièvement les concepts qui apparaissent dans le théorème précédent. Soient γ, γ' deux courbes intégrales de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ et soient $|\gamma|$, $|\gamma'|$ leurs images. On dit que γ, γ' sont « distinctes » si $|\gamma|$, $|\gamma'|$ ne sont pas contenues dans une même orbite du flot de X, que γ, γ' sont *sous-analytiquement séparables* s'il existe une application f bornée, non constante, sous-analytique sur un voisinage de $|\gamma| \cup |\gamma'|$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que le nombre de points de $f(|\gamma|) \cap f(|\gamma'|)$ est fini. Des coordonnées $w = (x, y, z)$ centrées en p sont dites z-positives pour γ si $|\gamma| \subset \{z > 0\}$ et si γ coupe transversalement les plans $z =$

constante. On peut alors reparamétrer $|\gamma|$ par z. Ce que nous écrivons $z \mapsto \gamma(z) = (x(z), y(z), z)$, $z > 0$. Deux courbes γ, γ' sont *asymptotiquement enlacées* s'il existe des coordonnées w, z-positives pour γ, γ', telles que la courbe $z \mapsto (\gamma(z) - \gamma'(z))$ dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \equiv \mathbb{R}^2$ spirale autour de 0. Ce concept est indépendant des coordonnées choisies pour le définir lorsque γ, γ' sont non oscillantes.

Théorème II. — *Soit* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *un pinceau intégral enlacé de courbes non oscillantes.*

(1) $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *possède un axe formel* $\widehat{\Gamma}$ *non convergent transcendant ; c'est-à-dire qu'il n'existe pas de surface analytique qui contienne* $\widehat{\Gamma}$.

(2) *Si* V *est un voisinage de* p, *il existe un ouvert sous-analytique connexe* $U \subset V$ *positivement invariant par le flot de* X *tel qu'une courbe intégrale* γ *de* X *appartient à* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *si et seulement si* $|\gamma| \cap U \neq \varnothing$.

Un pinceau enlacé de courbes non oscillantes est X-irréductible au sens suivant. Un ouvert U comme dans le théorème II n'est pas la réunion de deux ensembles sous-analytiques non vides, disjoints, positivement invariants par le flot de X. En effet, sinon, U contiendrait un sous-ensemble sous-analytique A positivement invariant par le flot de X de dimension inférieure ou égale à deux. L'axe formel $\widehat{\Gamma}$ de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ serait contenu dans A, ce qui contredirait l'assertion 1 du théorème II.

Supposons que γ_0 soit une courbe oscillante qui possède des tangentes itérées et que γ_0 n'a pas un contact plat avec une courbe contenue dans $\operatorname{Sing} X$. D'après le théorème du spiralement axial, toutes les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0) \setminus \Gamma$ sont oscillantes et spiralent autour d'un axe Γ. Une des composantes connexes de $\Gamma \setminus \{p\}$, notée Γ^+ est une courbe intégrale de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$. Deux courbes quelconques, distinctes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont asymptotiquement enlacées et il existe encore U, un ouvert X-invariant comme dans le théorème II [**7**]. Mais dans ce cas, $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ n'est pas X-irréductible puisque $U = (U \setminus \Gamma^+) \cup \Gamma^+$.

***Exemple* (L'équation d'Euler)**. — Dans $\mathbb{C}^2$ muni des coordonnées (u, v) l'équation différentielle

$$(E_\varepsilon) \qquad \frac{du}{dt} = -u + \varepsilon v, \quad \frac{dv}{dt} = -v^2 \quad \text{avec } \varepsilon = 0, 1$$

définit un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}_\varepsilon$ dont $v = 0$ est une séparatrice. Le plongement j_ω de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^2$ défini par $j_\omega(u, z) = (u, \omega z)$ avec $\omega = \exp(-i\alpha)$ où α est réel, $|\alpha| < \pi/2$ est transverse à $\mathcal{F}_\varepsilon$. L'image inverse $\mathcal{F}_{\varepsilon,\omega}$ de $\mathcal{F}_\varepsilon$ par j_ω est un feuilletage en courbes réelles. Sa description permet de mieux comprendre la géométrie de $\mathcal{F}_\varepsilon$ du « côté noeud-col » [**23**]. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ via l'écriture $u = x + iy = (x, y)$, les feuilles de $\mathcal{F}_{\varepsilon,\omega}$ sont les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$(E_{\varepsilon,\omega}) \qquad \frac{dx}{dt} = -\cos\alpha x + \sin\alpha y + \varepsilon z, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin\alpha x - \cos\alpha y, \quad \frac{dz}{dt} = -z^2.$$

Le plan $z = 0$ est la variété stable de $E_{\varepsilon,\omega}$. Les courbes intégrales γ de $E_{\varepsilon,\omega}$ contenues dans $z > 0$ sont transverses aux plans z =constante. Ce sont des graphes $\gamma(z) =$

$(u(z), z)$, $z > 0$ de fonctions $u(z)$ solutions de

$$z^2 \frac{du}{dz} = \frac{u}{\omega} - \varepsilon z, \quad \text{avec } u(z) = x(z) + iy(z),\ z > 0.$$

Si $\varepsilon = 0$, on a $u(z) = c \exp(-1/\omega z)$, $c \in \mathbb{C}$ L'ensemble des $|\gamma| \subset \{z > 0\}$ est un pinceau intégral P_0 d'axe $\Gamma = \{u = 0\}$. Si $\omega = 1$, elles sont non oscillantes et P_0 est séparé. Si $\omega \neq 1$, les courbes de $P_0 \setminus \Gamma$ sont oscillantes, elles spiralent autour de Γ. Si $\varepsilon = 1$, l'ensemble des $|\gamma| \subset \{z > 0\}$ est un pinceau intégral P_1 d'axe formel

$$\widehat{\Gamma}_\omega(z) = (\widehat{x}(z), \widehat{y}(x), z) \equiv (\widehat{u}(z), z), \quad \text{avec } \widehat{u}(z) = \sum_{n \geqslant 1} (n-1)!\, \omega^{n-1} z^n.$$

Soient γ, γ', distinctes, appartenant à P_1, $\gamma(z) = (u(z), z)$, $\gamma'(z) = (u'(z), z)$. Alors on a $(u(z) - u'(z)) = c \exp(-1/\omega z)$, $c \in \mathbb{C}$. Si $\omega = 1$, P_1 est un pinceau séparé de courbes non oscillantes. Si $\omega \neq 1$, P_1 est un pinceau enlacé de courbes non oscillantes.

Les concepts oscillation, tangentes itérées, enlacement asymptotique, séparation sont définis de façon précise dans le chapitre suivant. Par des arguments classiques de géométrie analytique réelle nous montrons qu'ils sont stables par des morphismes permis. Ce sont des composés d'éclatements de points, de courbes lisses et de ramifications au-dessus de surfaces lisses. Ainsi, d'après le « théorème d'uniformisation polarisée » de [**6**], il suffit de démontrer les théorèmes I et II lorsque la partie linéaire $DX(p)$ n'est pas nilpotente. Il est alors nécessaire de distinguer différents cas selon la nature du spectre de $DX(p)$. Cette démarche nécessite encore quelques définitions : pinceau final hyperbolique, pinceau final de type I, pinceau final de type II.

Les chapitres 2, 3, 4 sont consacrés aux démonstrations des théorèmes I (sans l'alternative) et II pour les pinceaux hyperboliques, finaux de type I, finaux de type II, respectivement. Enfin, dans le chapitre 5, nous montrons l'alternative du théorème I et nous prouvons que l'étude des pinceaux intégraux se ramène à celui des pinceaux finaux.

Ce travail doit beaucoup à une question de F. Dumortier et à des conversations avec J.-M. Lion. Nous les remercions vivement.

1. Enlacement asymptotique et pinceau intégral

Dans toute cette partie, X désigne un champ de vecteurs analytique sur une variété M de dimension trois et $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, $t \geqslant 0$ une courbe intégrale non constante de X dont l'ensemble ω-limite noté $p = \omega(\gamma)$ est un point singulier de X. Dans un premier paragraphe nous rappelons quelques concepts définis dans [**7**] : tangentes itérées, courbes oscillantes, spiralement axial. Dans le paragraphe suivant nous étudions les propriétés « individuelles » d'une courbe γ non oscillante. Nous montrons essentiellement que la non oscillation est une propriété stable par des *morphismes admissibles*. Ce sont des composés d'éclatements de points, de courbes et des ramifications. Le