Séminaire BOURBAKI Novembre 2004
57e année, 2004-2005, nº 938, p. 1 à 31

MÉTRIQUES KÄHLÉRIENNES À COURBURE SCALAIRE CONSTANTE : UNICITÉ, STABILITÉ

par **Olivier BIQUARD**

Une surface de Riemann compacte admet une métrique à courbure constante, unique à l'action près des automorphismes holomorphes. La recherche d'un phénomène analogue en dimension supérieure est une question centrale de la géométrie différentielle complexe. Plus précisément, il s'agit, étant donnée une variété kählérienne compacte, de trouver dans chaque classe de Kähler une métrique « canonique ». La notion la plus naturelle, introduite par Calabi, est celle de métrique extrémale. Les métriques kählériennes à courbure scalaire constante sont extrémales, et la réciproque est souvent vraie (en particulier en l'absence de champ de vecteurs holomorphe).

La question de l'existence des métriques kählériennes à courbure scalaire constante est très difficile, et peu de résultats sont connus, en dehors du cas où la classe canonique est un multiple de la classe de Kähler : le problème se réduit alors à l'existence d'une métrique Kähler-Einstein, pour lequel on renvoie à l'excellent exposé nº 830 de J.-P. Bourguignon et aux références qu'il contient. Rappelons simplement que ce problème est complètement résolu dans les cas $c_1 < 0$ (Aubin [2], Yau [66]) et $c_1 = 0$ (Yau [66, 67]), mais le cas Fano ($c_1 > 0$), demeure ouvert en dépit de nombreux résultats, en particulier de Tian, voir notamment [56, 58, 60]. Yau [68] a conjecturé que l'existence d'une métrique Kähler-Einstein dans le cas Fano est liée à une forme de stabilité algébrique de la variété, au sens de la théorie géométrique des invariants. Cette conjecture a été confirmée par Tian, qui a montré que l'existence d'une métrique Kähler-Einstein implique une notion de stabilité qu'il appelle K-stabilité [60] ; ce travail l'a mené à formuler une « conjecture de Hitchin-Kobayashi » pour les variétés, liant stabilité et existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante. Les travaux de Donaldson, puis de Mabuchi, Chen et Tian, ont permis d'avancer de manière substantielle dans cette direction, et en particulier d'obtenir des résultats généraux d'unicité et de stabilité des métriques kählériennes à courbure scalaire constante.

On désignera par $\mathrm{Aut}(M)$ le groupe des automorphismes holomorphes de la variété complexe compacte M, et par $\mathrm{Aut}^0(M)$ la composante connexe de l'identité. Si (M, L) est une variété kählérienne polarisée (la classe de Kähler est $c_1(L)$), le groupe des automorphismes holomorphes de L modulo les automorphismes triviaux $\mathbb{C}^*$ sera noté $\mathrm{Aut}(M,L)$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(M)$.

Théorème 0.1 (Donaldson [19]). — *Soit (M,L) une variété complexe compacte polarisée, à groupe d'automorphismes* $\mathrm{Aut}(M,L)$ *discret. Si la classe de Kähler $c_1(L)$ admet une métrique kählérienne à courbure scalaire constante, alors :*

(1) *la métrique à courbure scalaire constante est unique dans la classe de Kähler ;*

(2) *pour k assez grand, les plongements projectifs de M dans $PH^0(M,L^k)$ sont stables au sens de Chow-Mumford* (*i.e.* (M,L) *est asymptotiquement stable au sens de Chow-Mumford*).

La force du second énoncé se mesure au fait que la stabilité asymptotique d'une variété algébrique polarisée est une propriété notoirement difficile à vérifier.

À noter que dans le cas Kähler-Einstein Fano, l'unicité de la métrique Kähler-Einstein est aussi un problème délicat, résolu antérieurement par Bando et Mabuchi [3].

Le théorème a été étendu par Mabuchi, et Chen et Tian. Ces derniers aboutissent à l'énoncé le plus général suivant.

Théorème 0.2. — *Sur une variété complexe compacte M, deux métriques kählériennes extrémales dans la même classe de Kähler diffèrent par un automorphisme holomorphe dans* $\mathrm{Aut}^0(M)$.

Le cas d'une variété polarisée, à groupe d'automorphismes non trivial, est traité par Mabuchi [39, 40, 41, 42]. Il montre en outre une forme modifiée de stabilité au sens de Chow, tenant compte de l'action du centre de $\mathrm{Aut}^0(M,L)$ sur $H^0(M,L^k)$, voir section 3.1.2.

Le théorème d'unicité définitif est montré par Chen et Tian [14] qui suppriment la condition que la classe de Kähler soit entière.

Les liens avec la K-(semi)stabilité, ainsi que la conjecture liant K-stabilité et existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante, seront détaillés dans la section 3.2.

Donnons un bref aperçu de la méthode de Donaldson : dans [17] il interprète le problème des métriques kählériennes à courbure scalaire constante comme un analogue de dimension infinie d'un problème d'application moment de l'action hamiltonienne d'un groupe compact G sur une variété symplectique. Le rôle de l'espace symétrique de type non compact $G^{\mathbb{C}}/G$ est joué par l'espace des potentiels de Kähler, et l'unicité résulterait du formalisme général des applications moment si, dans l'espace des potentiels de Kähler, deux points pouvaient toujours être joints par une géodésique [18]. Dans [19], Donaldson contourne la difficulté par une méthode de quantification consistant à approximer l'espace des potentiels de Kähler par les espaces symétriques $SL(N_k+1)/SU(N_k+1)$ des métriques de Fubini-Study sur les espaces projectifs $P^{N_k} = PH^0(M,L^k)^*$ dans lesquels se plonge M (le rôle de la constante de Planck étant joué par $1/k$) ; la métrique kählérienne à courbure scalaire constante s'approxime dans chaque projectif par une métrique « équilibrée », dont l'existence est équivalente à la stabilité au sens de Chow (Zhang [70], Luo [36]).

Cet exposé a pour but d'expliquer la méthode utilisée par Donaldson, dont les principes sont utilisés aussi par Mabuchi. En revanche, Chen et Tian reviennent au programme initial en travaillant directement sur l'espace de dimension infinie des potentiels de Kähler, ce qui explique qu'ils n'ont plus besoin d'une polarisation ; la démonstration passe par des résultats nouveaux de régularité de solutions d'une équation de Monge-Ampère complexe homogène, que nous n'aborderons pas dans ce séminaire.

Dans la première section, nous exposons quelques généralités sur les métriques kählériennes, avant de passer au schéma formel posant le problème sous forme symplectique. Dans la seconde section, nous donnons la démonstration proprement dite du théorème, via la construction des métriques équilibrées. Enfin, dans la troisième section, nous effleurons diverses notions de stabilité des variétés algébriques, la conjecture sur le lien avec l'existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante, ainsi que certains développements très récents.

Remerciements. Je remercie Paul Gauduchon pour sa précise relecture du manuscrit.

1. GÉOMÉTRIE KÄHLÉRIENNE ET COURBURE SCALAIRE

1.1. Préliminaires

Ici, nous introduisons les métriques extrémales. Outre les articles fondateurs de Calabi [8, 9], d'excellentes références sur le sujet sont [4, 26, 62].

1.1.1. Métriques extrémales. — Soit M^{2n} une variété complexe, dont on notera la structure complexe J. Une forme de Kähler est une (1,1)-forme fermée, telle que la formule $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ définisse une métrique riemannienne. La connexion de Levi-Civita induit une connexion sur le fibré canonique $K_M = \Lambda^n \Omega^1_M$, dont la courbure s'écrit $i\rho_\omega$ pour une (1,1)-forme réelle fermée ρ_ω appelée forme de Ricci. Elle est reliée au tenseur de Ricci via la structure complexe : $\rho_\omega(X,Y) = \mathrm{Ric}(JX,Y)$. La forme $\rho_\omega/2\pi$ représente la classe de cohomologie $c_1(M)$, et la courbure scalaire de la métrique g est

$$s_\omega = 2\Lambda\rho_\omega$$

où Λ est l'opérateur de contraction par la forme de Kähler[(1)].

[(1)]La normalisation de la courbure scalaire en géométrie kählérienne fluctue suivant les auteurs, on trouve souvent le choix $\frac{1}{4}s_\omega$ qui simplifie certaines formules ; on a préféré ici s'en tenir strictement à la définition provenant de la géométrie riemannienne. Cela peut expliquer, pour certaines formules, la divergence entre ce séminaire et certains des articles cités.

Pour fixer les notations, si, dans des coordonnées holomorphes locales (z^j), la forme de Kähler s'écrit

$$\omega = \frac{i}{2} g_{j\overline{k}} dz^j \wedge d\overline{z}^k,$$

alors on obtient les formules

$$\rho_\omega = -i\partial\overline{\partial} \log\det(g_{j\overline{k}}), \qquad s_\omega = -4g^{\ell\overline{m}} \frac{\partial^2}{\partial z^\ell \partial \overline{z}^m} \log\det(g_{j\overline{k}}).$$

La forme volume est $d\mu_\omega = \frac{\omega^n}{n!}$, le volume total $V = \int_M d\mu_\omega$ ne dépend que de la classe de cohomologie $\Omega = [\omega]$, et la moyenne $\overline{s}_\omega$ de la courbure scalaire est ainsi déterminée par la topologie :

$$\overline{s}_\omega = \frac{1}{V} \int_M s_\omega d\mu_\omega = \frac{1}{V} \int_M 2\rho_\omega \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = 4\pi n \frac{c_1(M)\Omega^{n-1}}{\Omega^n}.$$

Les identités kählériennes, impliquant l'opérateur $d^C = J^{-1}dJ$ sur les formes différentielles, permettent de retrouver l'identité de Bianchi :

$$d^* \rho_\omega = [\Lambda, d^C]\rho_\omega = -d^C \Lambda \rho_\omega = -\frac{1}{2} d^C s_\omega.$$

L'équation « s_ω constante » est donc équivalente à « ρ_ω harmonique » ; en particulier, si $c_1(M)$ est proportionnelle à la classe de Kähler (dont le représentant harmonique est justement ω), l'équation est équivalente à demander que ρ_ω soit proportionnelle à ω, c'est-à-dire que ω soit Kähler-Einstein.

La fonctionnelle de Calabi [8] est définie sur l'espace des formes de Kähler dans la classe de cohomologie fixée $\Omega \in H^2(M, \mathbb{R})$, par

$$\mathscr{C}(\omega) = \int_M s_\omega^2 d\mu_\omega.$$

Les points critiques de $\mathscr{C}$, appelés métriques extrémales, sont caractérisés par la condition que le champ de vecteurs $K = \sharp ds_\omega$ (où $\sharp : \Omega^1 \to T$ est la dualité symplectique, définie par $(\sharp\alpha) \lrcorner \omega = \alpha$) soit holomorphe. Notant

$$\mathscr{D} = 2\overline{\partial}\sharp\overline{\partial} \tag{1}$$

l'opérateur de Lichnerowicz, l'équation s'écrit donc $\mathscr{D} s_\omega = 0$. Elle est bien entendu vérifiée si s_ω est constante.

1.1.2. Le groupe d'automorphismes. — Un rôle important est joué ici par le groupe des automorphismes de M ou de (M, L). Supposons donc donnée sur le fibré holomorphe en droites complexes L une métrique hermitienne, à courbure $F_L = -i\omega$. Notons également ξ le champ de vecteurs tautologique sur L. Un champ de vecteurs complexe sur L se décompose en

$$\widehat{v} = \widetilde{v} + f\xi,$$

où $\widetilde{v}$ est horizontal pour la connexion de L, et f est une fonction à valeurs complexes. On vérifie facilement que $\widehat{v}$ est holomorphe aux conditions suivantes :

(1) $\widetilde{v}$ est le remonté horizontal d'un champ de vecteurs holomorphe v sur M ;
(2) la fonction f satisfait $\sharp\overline{\partial}f = v$ (et donc $\mathscr{D}f = 0$).

On en déduit immédiatement :

LEMME 1.1. — *L'algèbre de Lie du groupe* $\mathrm{Aut}(M, L)$ *est isomorphe à l'espace des solutions* $f \in C_0^\infty(M, \mathbb{C})$ *de l'équation* $\mathscr{D}f = 0$.

Une autre manière d'énoncer le lemme est de dire que l'algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}(M, L)$ s'identifie aux champs de vecteurs holomorphes, hamiltoniens-complexes (de la forme $\sharp\overline{\partial}f$ pour f une fonction complexe).

Le groupe d'automorphismes est une source importante d'obstructions à l'existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante. La plus ancienne est l'obstruction de Matsushima-Lichnerowicz [43, 34] : *si M admet une métrique kählérienne à courbure scalaire constante, alors l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes sur M est réductive.* Plus précisément, cette algèbre se décompose en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}$, où $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie complexe abélienne (constituée des champs de vecteurs parallèles), et $\mathfrak{h}$ s'identifie aux solutions complexes de l'équation $\mathscr{D}f = 0$ (voir le lemme 1.1 dans le cas polarisé) ; les solutions réelles engendrent le groupe d'isométries de M.

Un autre invariant provenant du groupe d'automorphismes est le *caractère de Futaki*, qui sera introduit section 1.3.4.

1.1.3. Exemple : les surfaces complexes réglées. — Nous n'aborderons pas ici les exemples provenant du problème des métriques Kähler-Einstein (voir [5]).

Burns et De Bartolomeis [7] furent sans doute les premiers à détecter un lien entre stabilité algébrique et existence de métriques kählériennes à courbure scalaire nulle : sur une surface complexe réglée $S = PE$, où E est un fibré holomorphe de rang 2 sur une surface de Riemann Σ, à genre supérieur ou égal à 2, ils ont montré que S admet une métrique kählérienne à courbure scalaire nulle si et seulement si E provient d'une représentation du $\pi_1(\Sigma)$ dans PU_2, c'est-à-dire, par le théorème de Narasimhan et Seshadri, est (poly-)stable. La métrique kählérienne à courbure scalaire nulle dans ce cas est localement symétrique (quotient du produit du disque hyperbolique et de la droite projective P^1).

Ce résultat a été étendu par LeBrun, en utilisant la théorie de Seiberg-Witten, aux métriques kählériennes à courbure scalaire constante négative sur les surfaces réglées [32].

Le problème de construction de métriques kählériennes à courbure scalaire constante est très difficile (équation d'ordre 4 sur le potentiel de Kähler), et très peu de résultats sont connus. Une exception notable existe en dimension 4 : les métriques kählériennes à courbure scalaire nulle, invariantes sous l'action d'un cercle, se décrivent explicitement en termes de fonctions harmoniques sur l'espace hyperbolique réel de dimension 3 (ansatz hyperbolique de LeBrun [31]). Parmi les applications de